

Fonologia Matematica: Geometrie e Algebre dei Sistemi Sonori

Introduzione: Il Linguaggio come Sistema Formale

La fonologia matematica rappresenta uno dei campi più affascinanti e rigorosi dell'indagine linguistica contemporanea, situandosi all'intersezione tra la linguistica teorica, la matematica pura e le scienze cognitive. Questo approccio considera i sistemi fonologici non semplicemente come collezioni arbitrarie di suoni utilizzati nelle lingue naturali, ma come strutture algebriche profondamente organizzate, governate da principi matematici universali che trascendono le specificità delle singole lingue. La prospettiva matematica applicata alla fonologia non costituisce una mera applicazione di formalismi astratti a fenomeni empirici, bensì rivela che le stesse proprietà strutturali dei sistemi sonori delle lingue naturali riflettono architetture computazionali e geometriche fondamentali.

L'idea che i sistemi fonologici possano essere descritti mediante strutture matematiche risale alle prime formalizzazioni della linguistica strutturale, ma ha acquisito una nuova dimensione con lo sviluppo della fonologia generativa negli anni Sessanta del Novecento. I lavori pionieristici di Noam Chomsky e Morris Halle, culminati nella pubblicazione di "The Sound Pattern of English" nel 1968, hanno stabilito che i processi fonologici potevano essere concepiti come trasformazioni formali operanti su rappresentazioni simboliche dei segmenti fonologici. Questa intuizione fondamentale ha aperto la strada a una matematizzazione sempre più sofisticata della disciplina, che ha progressivamente incorporato strumenti dalla teoria degli insiemi, dall'algebra astratta, dalla topologia, dalla teoria dei grafi e dalla geometria differenziale.

La fonologia matematica contemporanea si articola su diverse dimensioni teoriche complementari. In primo luogo, essa studia le proprietà algebriche dei sistemi di tratti distintivi, considerando i segmenti fonologici come elementi di spazi vettoriali finiti o come punti in reticoli ordinati. In secondo luogo, analizza le geometrie sottostanti ai sistemi fonologici, esplorando come i tratti distintivi si organizzino in strutture gerarchiche che riflettono dipendenze fonologiche universali. In terzo luogo, impiega la teoria dei grafi per modellare le rappresentazioni autosegmentali, dove i diversi livelli di organizzazione fonologica sono concepiti come grafi con nodi e archi che catturano relazioni di associazione e dominanza. In quarto luogo, utilizza tecniche di ottimizzazione matematica per comprendere la Teoria dell'Ottimalità, un quadro teorico che concepisce la grammatica fonologica come un sistema di vincoli in competizione risolti mediante ordinamenti gerarchici. Infine, incorpora modelli dinamici derivati dalla fisica matematica per descrivere i processi articolatori e acustici della produzione del linguaggio.

Questo trattato si propone di esplorare sistematicamente tutte queste dimensioni, fornendo una panoramica rigorosa e dettagliata degli strumenti matematici impiegati nella descrizione dei sistemi fonologici e dei processi che li caratterizzano. L'obiettivo non è semplicemente quello di illustrare come la matematica possa essere applicata alla fonologia, ma di mostrare

come le strutture matematiche emergano naturalmente dall'analisi dei fenomeni fonologici stessi, rivelando regolarità profonde che altrimenti rimarrebbero oscure. La prospettiva adottata è quella secondo cui il linguaggio, nella sua dimensione sonora, costituisce un sistema naturale governato da principi di organizzazione che sono fondamentalmente matematici nella loro natura.

Fondamenti Algebrici: I Sistemi di Tratti Distintivi come Strutture Algebriche

La nozione di tratto distintivo costituisce uno dei pilastri concettuali della fonologia moderna. Un tratto distintivo è una proprietà fonologica binaria o multivalente che distingue una classe di segmenti da un'altra all'interno di un sistema fonologico. I tratti distintivi non sono semplicemente descrittori fonetici arbitrari, ma rappresentano primitivi teorici che catturano generalizzazioni fonologiche profonde. La teoria dei tratti distintivi, sviluppata originariamente da Roman Jakobson, Gunnar Fant e Morris Halle negli anni Cinquanta, ha fornito il primo framework sistematico per l'analisi algebrica dei sistemi fonologici.

La Struttura Algebrica dei Tratti Binari

Nella formulazione classica della teoria generativa, i tratti distintivi sono concepiti come feature binarie che assumono i valori positivo (+) o negativo (-). Un segmento fonologico può essere rappresentato come un vettore di tratti, ovvero come un elemento di uno spazio prodotto cartesiano. Se consideriamo un insieme finito di n tratti distintivi $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, allora l'insieme di tutti i possibili segmenti fonologici può essere rappresentato come:

$$S = \{+, -\}^n$$

Questo insieme costituisce un gruppo abeliano finito rispetto all'operazione di somma modulo 2 componente per componente. Formalmente, se definiamo l'operazione $\oplus$ tale che $(+) \oplus (+) = (-)$, $(+) \oplus (-) = (+)$, $(-) \oplus (+) = (+)$, $(-) \oplus (-) = (-)$, allora per ogni coppia di vettori di tratti $s_1, s_2 \in S$, abbiamo:

$$s_1 \oplus s_2 = (s_1[1] \oplus s_2[1], s_1[2] \oplus s_2[2], \dots, s_1[n] \oplus s_2[n])$$

Questa struttura algebrica cattura formalmente l'idea che i processi fonologici possano essere concepiti come operazioni che modificano specifici tratti distintivi. L'elemento neutro di questo gruppo è il vettore $(-, -, \dots, -)$, e ogni elemento è il proprio inverso, poiché $s \oplus s = (-, -, \dots, -)$ per ogni $s \in S$.

Tuttavia, non tutti i vettori teoricamente possibili in $\{+, -\}^n$ corrispondono a segmenti fonologici attestati nelle lingue naturali. Esistono infatti vincoli universali di buona formazione che restringono lo spazio dei segmenti possibili. Questi vincoli possono essere espressi come sottoinsiemi algebrici dello spazio totale. Ad esempio, il vincolo secondo cui un segmento non può essere simultaneamente [+continuo] e [+occlusivo] definisce un sottoinsieme proprio di S . L'insieme dei segmenti ben formati $S^* \subset S$ costituisce quindi un sottogruppo o, più generalmente, una varietà algebrica all'interno dello spazio totale.

Reticoli di Tratti e Strutture di Ordinamento Parziale

Una prospettiva alternativa e complementare considera i sistemi di tratti distintivi come reticoli parzialmente ordinati. In questa concezione, i tratti non sono semplicemente binari, ma possono essere organizzati in gerarchie di specificazione. Possiamo definire una relazione d'ordine parziale $\leq$ sull'insieme dei tratti, dove $t_1 \leq t_2$ significa che il tratto t_1 è più specifico o più marcato del tratto t_2 .

Un reticolo $(L, \leq, \wedge, \vee)$ è una struttura algebrica dove ogni coppia di elementi ha un supremo (join) denotato da $\vee$ e un infimo (meet) denotato da $\wedge$. Nel contesto fonologico, il meet di due tratti rappresenta il tratto più specifico che entrambi condividono, mentre il join rappresenta il tratto più generale che li comprende entrambi. Ad esempio, se consideriamo i tratti [coronale] e [labiale], il loro meet potrebbe essere il tratto vuoto (nessuna specificazione di luogo di articolazione comune), mentre il loro join potrebbe essere il tratto sovraordinato [luogo di articolazione].

La struttura di reticolo dei tratti distintivi cattura importanti generalizzazioni fonologiche. I processi di assimilazione, ad esempio, possono essere modellizzati come operazioni di meet: quando un segmento assimila un tratto da un segmento adiacente, il risultato è il tratto più specifico compatibile con entrambi i segmenti. Formalmente, se s_1 e s_2 sono due segmenti e t è un tratto, allora il processo di assimilazione può essere rappresentato come:

$$s_1 \rightarrow s_1[t := s_1(t) \wedge s_2(t)]$$

dove $s(t)$ denota il valore del tratto t nel segmento s .

Algebre Booleane e Classi Naturali

Un concetto centrale nella fonologia generativa è quello di classe naturale. Una classe naturale è un insieme di segmenti che condividono una specificazione comune per un sottoinsieme di tratti distintivi e che si comportano in modo uniforme rispetto ai processi fonologici. Le classi naturali possono essere formalmente caratterizzate mediante algebre booleane costruite sull'insieme dei tratti distintivi.

Dato un insieme di tratti $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, possiamo costruire un'algebra booleana $B(T)$ i cui elementi sono espressioni booleane formate mediante congiunzione ($\wedge$), disgiunzione ($\vee$) e negazione ($\neg$) applicata ai tratti. Ogni espressione booleana definisce una classe di segmenti, ovvero l'insieme di tutti i segmenti che soddisfano quell'espressione. Ad esempio, l'espressione $[+consonantico] \wedge [-sonorante] \wedge [+coronale]$ definisce la classe delle consonanti ostruenti coronali.

Una proprietà fondamentale delle classi naturali è che esse sono chiuse rispetto alle operazioni booleane: l'intersezione di due classi naturali è una classe naturale, l'unione di due classi naturali è una classe naturale, e il complemento di una classe naturale è una classe naturale. Questa chiusura algebrica riflette la generalità dei processi fonologici, che tipicamente operano su classi definite mediante combinazioni di tratti.

La teoria delle algebre booleane fornisce anche strumenti per misurare la complessità delle classi naturali. Una classe naturale è tanto più semplice quanto minore è il numero di tratti

necessari per definirla. Formalmente, possiamo definire la complessità di una classe C come il numero minimo di letterali (tratti specificati) necessari in una forma normale disgiuntiva per caratterizzare C . I processi fonologici tendono a operare preferenzialmente su classi naturali di bassa complessità, un principio che può essere formalizzato mediante metriche algebriche sulla struttura $B(T)$.

Spazi Vettoriali e Rappresentazioni Geometriche dei Tratti

Una prospettiva più recente e potente considera i sistemi di tratti distintivi come spazi vettoriali su campi finiti. In questa concezione, ogni tratto distintivo corrisponde a una dimensione di uno spazio vettoriale, e ogni segmento corrisponde a un vettore in quello spazio. Se consideriamo n tratti binari, possiamo rappresentare lo spazio dei segmenti come lo spazio vettoriale F_2^n , dove $F_2 = \{0, 1\}$ è il campo finito con due elementi.

In questo framework, i processi fonologici possono essere rappresentati come trasformazioni lineari. Una regola fonologica che modifica un insieme specifico di tratti può essere rappresentata come una matrice di trasformazione M che opera sui vettori di tratti. Formalmente, se s è un vettore di tratti che rappresenta un segmento, allora l'applicazione della regola fonologica produce il segmento $s' = Ms \pmod{2}$.

Ad esempio, una regola di desonorizzazione che cambia il tratto $[+sonorante]$ in $[-sonorante]$ può essere rappresentata come una matrice che moltiplica la componente corrispondente alla sonoranza per zero. Se la sonoranza è la i -esima componente, allora la matrice M avrà la forma di una matrice identità eccetto che nella posizione (i,i) , dove avrà il valore 0.

La rappresentazione vettoriale permette anche di definire metriche sullo spazio dei segmenti. Una metrica naturale è la distanza di Hamming, che conta il numero di tratti in cui due segmenti differiscono. Se s_1 e s_2 sono due vettori di tratti, allora la distanza di Hamming è:

$$d_H(s_1, s_2) = |\{i : s_1[i] \neq s_2[i]\}|$$

Questa metrica cattura l'intuizione fonologica secondo cui segmenti che differiscono in pochi tratti sono più simili di segmenti che differiscono in molti tratti. Molti processi fonologici, come le assimilazioni parziali, possono essere interpretati come operazioni che minimizzano la distanza di Hamming tra segmenti adiacenti.

Un'estensione più sofisticata considera non il campo finito F_2 , ma spazi vettoriali su campi più grandi o addirittura su corpi ordinati come i reali. In questa concezione, i tratti non sono semplicemente binari ma possono assumere valori continui, catturando la natura graduale di molte proprietà fonetiche. Ad esempio, il grado di apertura vocalica potrebbe essere rappresentato come un valore continuo nell'intervallo $[0, 1]$, dove 0 corrisponde a una vocale completamente chiusa e 1 a una vocale completamente aperta.

In questa prospettiva continua, lo spazio dei segmenti diventa uno spazio vettoriale reale R^n , e i processi fonologici possono essere modellizzati come campi vettoriali o sistemi dinamici che governano l'evoluzione temporale delle configurazioni articolatorie. Questa connessione tra la fonologia algebrica discreta e i modelli dinamici continui costituisce uno dei ponti più importanti tra le diverse prospettive matematiche sulla fonologia.

Gruppi di Trasformazione e Simmetrie Fonologiche

Una prospettiva ancora più astratta considera i processi fonologici come elementi di gruppi di trasformazione. Ogni regola fonologica può essere concepita come una funzione che mappa segmenti in segmenti, e l'insieme di tutte le regole fonologiche forma un semigrupp (e in certi casi un gruppo) rispetto alla composizione di funzioni.

Formalmente, sia Φ l'insieme di tutte le possibili trasformazioni fonologiche $\varphi: S \rightarrow S$, dove S è lo spazio dei segmenti. Dotato dell'operazione di composizione $\circ$, la struttura $(\Phi, \circ)$ forma un monoide, con la trasformazione identità $\text{id}(s) = s$ come elemento neutro. Se ogni trasformazione è invertibile, ovvero se per ogni $\varphi \in \Phi$ esiste φ^{-1} tale che $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}$, allora $(\Phi, \circ)$ forma un gruppo.

L'analisi dei gruppi di trasformazione fonologica rivela simmetrie profonde nei sistemi fonologici. Una simmetria è una trasformazione che preserva certe proprietà strutturali del sistema. Ad esempio, in molte lingue esistono coppie di regole che sono l'una l'inversa dell'altra: una regola di lenizione che indebolisce le consonanti e una regola di fortificazione che le rafforza. Queste coppie di regole costituiscono elementi inversi nel gruppo delle trasformazioni.

Un esempio concreto è fornito dai sistemi di armonia vocalica. In molte lingue ural-altaiche, esiste un processo di armonia basato sul tratto di retrazione della radice della lingua (ATR: Advanced Tongue Root). Le vocali in una parola tendono ad accordarsi per questo tratto, e il processo può essere modellizzato come un'azione del gruppo ciclico Z_2 sullo spazio delle parole. Gli elementi del gruppo sono l'identità e la trasformazione che inverte il valore del tratto ATR per tutte le vocali. Le parole che sono simmetriche rispetto a questa trasformazione (ovvero che sono invarianti o che si mappano in parole equivalenti) costituiscono le configurazioni stabili del sistema.

La teoria delle rappresentazioni di gruppo fornisce strumenti potenti per analizzare queste simmetrie. Una rappresentazione di un gruppo G su uno spazio vettoriale V è un omomorfismo $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$, dove $\text{GL}(V)$ è il gruppo delle trasformazioni lineari invertibili di V . Nel contesto fonologico, una rappresentazione associa a ogni trasformazione fonologica astratta una trasformazione lineare concreta sullo spazio dei tratti. Le rappresentazioni irriducibili corrispondono ai modi fondamentali in cui le trasformazioni fonologiche possono agire sui sistemi di tratti, e la decomposizione di una rappresentazione generale in componenti irriducibili rivela la struttura modulare dei processi fonologici.

Algebre Tensoriali e Combinazioni di Tratti

Una generalizzazione naturale della rappresentazione vettoriale considera gli spazi tensoriali costruiti sugli spazi di tratti. Un tensore è una generalizzazione multidimensionale di un vettore, e gli spazi tensoriali permettono di catturare interazioni complesse tra tratti distintivi.

Dato uno spazio vettoriale di tratti V , possiamo costruire lo spazio tensoriale $T(V)$ come la somma diretta:

$$T(V) = R \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots$$

dove $V \otimes V$ denota il prodotto tensoriale di V con se stesso. Gli elementi di V sono i tensori di rango 1 (vettori ordinari), gli elementi di $V \otimes V$ sono i tensori di rango 2 (matrici generalizzate), e così via.

Nel contesto fonologico, i tensori di rango superiore possono catturare interazioni non lineari tra tratti. Ad esempio, un tensore di rango 2 potrebbe rappresentare la correlazione tra due tratti: l'elemento t_{ij} del tensore potrebbe quantificare quanto frequentemente i tratti t_i e t_j co-occorrono con valori compatibili nei segmenti di una lingua. Analogamente, i tensori di rango superiore possono catturare correlazioni ancora più complesse.

I processi fonologici che coinvolgono interazioni multiple tra tratti possono essere modellizzati come operazioni tensoriali. Ad esempio, un processo di dissimilazione che dipende dalla presenza simultanea di tre tratti specifici potrebbe essere rappresentato come una contrazione tensoriale che opera su tensori di rango 3.

L'algebra tensoriale fornisce anche un framework naturale per la composizione di processi fonologici. Se due regole fonologiche sono rappresentate come trasformazioni tensoriali T_1 e T_2 , allora la loro composizione corrisponde al prodotto tensoriale $T_1 \otimes T_2$. Questa operazione cattura formalmente l'idea che l'applicazione sequenziale di due regole produca effetti che dipendono dalle interazioni tra le modifiche indotte da ciascuna regola.

Geometrie dei Tratti Distintivi: Strutture Gerarchiche e Dipendenze Fonologiche

Mentre l'approccio algebrico classico tratta i tratti distintivi come feature indipendenti organizzate in vettori piatti, le evidenze empiriche raccolte a partire dagli anni Settanta hanno rivelato che i tratti sono in realtà organizzati in strutture gerarchiche complesse. Questa scoperta ha portato allo sviluppo della geometria dei tratti (feature geometry), un framework teorico che rappresenta le dipendenze tra tratti mediante grafi orientati aciclici o alberi.

La Struttura Gerarchica dei Tratti: Fondamenti Empirici

Le motivazioni empiriche per una geometria dei tratti provengono da diverse osservazioni fonologiche ricorrenti nelle lingue del mondo. In primo luogo, i processi fonologici tendono a operare su gruppi coerenti di tratti piuttosto che su singoli tratti isolati. Ad esempio, i processi di assimilazione di luogo di articolazione tipicamente coinvolgono simultaneamente tutti i tratti che specificano il luogo (labiale, coronale, dorsale, ecc.), suggerendo che questi tratti formino un costituente naturale.

In secondo luogo, esistono dipendenze asimmetriche tra tratti: la specificazione di certi tratti implica necessariamente la specificazione di altri tratti sovraordinati. Ad esempio, un segmento può essere specificato come [coronale, +anteriore] solo se è già specificato come [consonantico] e [+luogo di articolazione]. Queste dipendenze asimmetriche suggeriscono una struttura ad albero in cui i tratti più specifici sono dominati da nodi che rappresentano tratti più generali.

In terzo luogo, i fenomeni di spreading (diffusione) fonologico mostrano comportamenti differenziali: alcuni tratti si diffondono come unità coese, mentre altri si diffondono indipendentemente. Questo comportamento può essere elegantemente catturato da una struttura gerarchica in cui i nodi interni rappresentano costituenti che possono diffondersi come unità.

Il Modello Classico della Geometria dei Tratti

Il modello classico della geometria dei tratti, sviluppato principalmente da George Clements e Elizabeth Hume negli anni Ottanta, organizza i tratti distintivi in una struttura ad albero con più livelli gerarchici. Alla radice dell'albero si trova il nodo radicale (root node), che rappresenta il segmento nella sua totalità. Da questo nodo si diramano diversi nodi di classe maggiore che rappresentano le principali categorie fonologiche: il nodo delle consonanti, il nodo delle vocali, e il nodo laringale.

Formalmente, possiamo rappresentare la geometria dei tratti come un grafo orientato aciclico $G = (V, E)$, dove V è l'insieme dei nodi (che comprendono sia i tratti distintivi che i nodi intermedi di classe) ed E è l'insieme degli archi orientati che rappresentano relazioni di dominanza. Un arco $(v_1, v_2) \in E$ indica che il nodo v_1 domina il nodo v_2 , ovvero che v_2 è dipendente da v_1 nella gerarchia.

La struttura gerarchica impone vincoli sulla propagazione delle specificazioni. Se un nodo n domina un insieme di nodi $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$, allora qualsiasi processo fonologico che fa riferimento a n opera simultaneamente su tutti i nodi dominati. Formalmente, se ϕ è un processo che modifica il nodo n , allora l'effetto di ϕ si propaga a tutti i n_i secondo la regola:

$$\phi(n) \Rightarrow \phi(n_1) \wedge \phi(n_2) \wedge \dots \wedge \phi(n_k)$$

Questa propagazione gerarchica cattura il comportamento coeso dei gruppi di tratti nei processi fonologici.

Topologia delle Geometrie dei Tratti

Da un punto di vista più astratto, la geometria dei tratti può essere analizzata mediante gli strumenti della topologia algebrica. L'albero dei tratti definisce uno spazio topologico in cui ogni nodo corrisponde a un punto, e la topologia è indotta dalla struttura di dominanza.

Possiamo definire una topologia T sull'insieme dei nodi V ponendo che un insieme $U \subseteq V$ è aperto se e solo se è chiuso verso l'alto rispetto alla relazione di dominanza: se $n \in U$ e n' domina n , allora $n' \in U$. Gli insiemi aperti in questa topologia corrispondono ai costituenti fonologici naturali, ovvero ai sottoinsiemi di tratti che possono essere riferiti coerentemente dai processi fonologici.

La connessione tra la geometria dei tratti e la topologia algebrica diventa ancora più evidente quando consideriamo le operazioni di spreading fonologico come funtori tra categorie topologiche. Uno spreading può essere visto come una mappa continua tra spazi di rappresentazioni fonologiche che preserva la struttura gerarchica. Formalmente, se X e Y sono due spazi di rappresentazioni fonologiche (ciascuno dotato di una geometria dei tratti),

allora uno spreading è una funzione continua $f: X \rightarrow Y$ tale che il diagramma delle dominanze commuta.

Fibrati di Tratti e Strutture Differenziabili

Una prospettiva ancora più sofisticata, sviluppata nella fonologia matematica contemporanea, considera le geometrie dei tratti come fibrati vettoriali o, più generalmente, come spazi fibrati. In questa concezione, esiste uno spazio base B che rappresenta le posizioni scheletriche nella rappresentazione fonologica (le posizioni C e V in una rappresentazione CV), e sopra ogni punto $b \in B$ è definita una fibra F_b che rappresenta l'insieme di tutte le possibili specificazioni di tratti per quella posizione.

Formalmente, un fibrato di tratti è una tripla (E, π, B) dove E è lo spazio totale delle configurazioni di tratti, B è lo spazio base delle posizioni, e $\pi: E \rightarrow B$ è la proiezione che assegna a ogni configurazione la sua posizione. Per ogni $b \in B$, la fibra $\pi^{-1}(b)$ è isomorfa a uno spazio standard F che rappresenta tutte le possibili specificazioni di tratti.

I processi fonologici possono essere rappresentati come sezioni di questo fibrato, ovvero come funzioni $s: B \rightarrow E$ tali che $\pi \circ s = \text{id}_B$. Una sezione assegna a ogni posizione una specificazione concreta di tratti. I processi di spreading corrispondono a condizioni di continuità o differenziabilità su queste sezioni: lo spreading richiede che le specificazioni di tratti varino "lentamente" tra posizioni adiacenti.

Se dotiamo lo spazio dei tratti di una struttura differenziabile, possiamo definire derivate delle sezioni, che misurano il tasso di cambiamento delle specificazioni di tratti attraverso le posizioni. Un processo di assimilazione completa corrisponderebbe a una sezione con derivata zero (le specificazioni sono costanti), mentre un processo di dissimilazione corrisponderebbe a una sezione con derivata grande (le specificazioni cambiano rapidamente).

Metriche Riemanniane sugli Spazi di Tratti

La struttura differenziabile può essere ulteriormente arricchita mediante l'introduzione di una metrica riemanniana sullo spazio dei tratti. Una metrica riemanniana g è un campo di prodotti scalari definito su ogni spazio tangente, che permette di misurare lunghezze e angoli in modo intrinseco.

Nel contesto fonologico, una metrica riemanniana sullo spazio dei tratti codifica la "distanza fonologica" tra diverse specificazioni di tratti. Specificazioni che sono fonologicamente vicine avranno una distanza riemanniana piccola, mentre specificazioni fonologicamente remote avranno una distanza grande. La metrica può essere costruita a partire da considerazioni empiriche sulla naturalezza fonologica: transizioni che sono fonologicamente naturali e frequentemente attestate nelle lingue corrispondono a geodetiche (percorsi di lunghezza minima) nello spazio metrico.

Formalmente, se M è lo spazio dei tratti considerato come varietà differenziabile, e g è la metrica riemanniana, allora per ogni coppia di punti $p, q \in M$ possiamo definire la distanza geodetica:

$$d_g(p, q) = \inf\{L_g(\gamma) : \gamma \text{ è una curva che connette } p \text{ e } q\}$$

dove $L_g(\gamma)$ è la lunghezza della curva γ calcolata usando la metrica g . I processi fonologici che trasformano una specificazione p in una specificazione q tendono a seguire (approssimativamente) le geodetiche nello spazio (M, g) , minimizzando lo sforzo fonologico.

La curvatura della varietà riemanniana (M, g) codifica informazioni sulla struttura globale dello spazio fonologico. Regioni di curvatura positiva corrispondono a zone dello spazio dei tratti dove le specificazioni tendono a convergere (attrattori fonologici), mentre regioni di curvatura negativa corrispondono a zone dove le specificazioni tendono a divergere. Questa interpretazione geometrica fornisce un framework potente per comprendere fenomeni di stabilità e instabilità nei sistemi fonologici.

Gruppi di Simmetria delle Geometrie dei Tratti

Le geometrie dei tratti possiedono spesso simmetrie non banali che riflettono regolarità universali nei sistemi fonologici. Un gruppo di simmetria è un gruppo di trasformazioni che preservano la struttura della geometria. Formalmente, se $G = (V, E)$ è il grafo della geometria dei tratti, allora il gruppo di automorfismi $\text{Aut}(G)$ consiste di tutte le biiezioni $\sigma: V \rightarrow V$ tali che $(v_1, v_2) \in E$ se e solo se $(\sigma(v_1), \sigma(v_2)) \in E$.

Gli elementi di $\text{Aut}(G)$ rappresentano trasformazioni fonologiche che preservano completamente la struttura gerarchica dei tratti. Ad esempio, in molte geometrie dei tratti esiste una simmetria che scambia i tratti di sonorità con i tratti di continuità, riflettendo la natura duale di questi due aspetti della sonoranza consonantica.

L'analisi dei gruppi di simmetria può rivelare regolarità nascoste nelle geometrie dei tratti. Se un gruppo di simmetria è transitivo su un certo sottoinsieme di nodi (ovvero se ogni nodo di quel sottoinsieme può essere mappato in ogni altro mediante qualche elemento del gruppo), allora tutti quei nodi sono fonologicamente equivalenti da un punto di vista strutturale. Questa equivalenza può spiegare perché certi processi fonologici operano in modo uniforme su classi apparentemente diverse di segmenti.

La teoria delle rappresentazioni può essere applicata anche ai gruppi di simmetria delle geometrie dei tratti. Le rappresentazioni irriducibili di $\text{Aut}(G)$ corrispondono ai modi fondamentali in cui i processi fonologici possono rispettare la struttura geometrica. La decomposizione di processi fonologici complessi in componenti irriducibili secondo queste rappresentazioni può rivelare la struttura modulare profonda della fonologia.

Categorie e Funtori nella Geometria dei Tratti

Un approccio ancora più astratto, proveniente dalla teoria delle categorie, considera le geometrie dei tratti come oggetti in una categoria, dove i morfismi sono funzioni che preservano la struttura gerarchica. Una categoria C consiste di una classe di oggetti $\text{Ob}(C)$ e, per ogni coppia di oggetti A, B , un insieme di morfismi $\text{Hom}(A, B)$ dotati di un'operazione di compos

Fonologia Autosegmentale come Teoria dei Grafi

La fonologia autosegmentale, sviluppata principalmente da John Goldsmith alla fine degli anni Settanta, rappresenta una delle innovazioni teoriche più significative nella fonologia contemporanea. Questa teoria riconosce che le rappresentazioni fonologiche non sono semplicemente sequenze lineari di segmenti, ma strutture multidimensionali in cui diversi livelli di organizzazione fonologica sono rappresentati su tier separati e interconnessi. La formalizzazione naturale di questa concezione impiega la teoria dei grafi, che fornisce gli strumenti matematici per rappresentare e analizzare queste strutture complesse.

Rappresentazioni Autosegmentali come Grafi Bipartiti

Nel framework autosegmentale classico, una rappresentazione fonologica consiste di almeno due tier: un tier scheletrico che rappresenta le posizioni temporali (slot C per le consonanti e slot V per le vocali), e uno o più tier melodici che rappresentano i contenuti fonologici effettivi (tratti segmentali, toni, caratteristiche laringali, ecc.). Le linee di associazione connettono elementi del tier scheletrico con elementi dei tier melodici.

Formalmente, questa struttura può essere rappresentata come un grafo bipartito $G = (S \cup M, E)$, dove S è l'insieme dei nodi scheletrici, M è l'insieme dei nodi melodici, ed $E \subseteq S \times M$ è l'insieme delle linee di associazione. La condizione di bipartizione garantisce che le linee di associazione connettano sempre nodi di tier diversi, mai nodi dello stesso tier.

Un principio fondamentale della fonologia autosegmentale è la Well-Formedness Condition (Condizione di Buona Formazione), che impone vincoli sulla struttura del grafo di associazione. Nelle formulazioni classiche, questa condizione richiede che ogni nodo scheletrico sia associato ad almeno un elemento melodico (nessun nodo vuoto) e che le linee di associazione non si incrocino (condizione di non incrocio). Quest'ultima condizione può essere formalizzata dicendo che il grafo G deve essere planare quando i nodi scheletrici sono disposti su una linea orizzontale in ordine sequenziale.

Formalmente, un grafo è planare se può essere rappresentato su un piano in modo che i suoi archi non si intersechino eccetto che nei nodi. Un celebre teorema della teoria dei grafi, il teorema di Kuratowski, fornisce una caratterizzazione completa dei grafi planari: un grafo è planare se e solo se non contiene un sottografo che sia una suddivisione di K_5 (il grafo completo su cinque nodi) o di $K_{3,3}$ (il grafo bipartito completo con tre nodi in ciascuna parte).

Nel contesto fonologico, la planarità del grafo di associazione assicura che non ci siano configurazioni dove due associazioni "si incrociano" quando rappresentate linearmente. Questa condizione cattura l'intuizione che i processi fonologici operano in modo locale e non possono creare dipendenze arbitrariamente complesse tra tier diversi.

Gradi di Nodi e Vincoli di Associazione

La teoria dei grafi fornisce diversi concetti utili per analizzare le strutture autosegmentali. Il grado di un nodo in un grafo è il numero di archi incidenti su quel nodo. Nel contesto autosegmentale, il grado di un nodo scheletrico rappresenta il numero di elementi melodici associati a quella posizione, mentre il grado di un nodo melodico rappresenta il numero di posizioni scheletriche su cui quell'elemento si estende.

Diversi vincoli fonologici possono essere formulati in termini di restrizioni sui gradi dei nodi. Ad esempio, il principio secondo cui ogni posizione scheletrica deve avere esattamente un contenuto segmentale può essere formalizzato richiedendo che $\deg(s) \geq 1$ per ogni $s \in S$. Analogamente, vincoli contro le consonanti o vocali lunghe possono essere formulati come restrizioni superiori sul grado dei nodi melodici: $\deg(m) \leq 1$ per ogni $m \in M$.

In molte lingue tonali, i toni possono associarsi a più di una sillaba (toni a plateau), e le sillabe possono portare più di un tono (contorni tonali). Questi fenomeni possono essere modellizzati permettendo che i nodi abbiano gradi superiori. Un tono ad alto livello che si estende su tre sillabe sarà rappresentato da un nodo tonale con grado 3, mentre una sillaba con un tono ascendente sarà rappresentata da un nodo scheletrico associato a due nodi tonali (basso e alto).

Cammini e Cicli nelle Rappresentazioni Autosegmentali

La nozione di cammino in un grafo è centrale per comprendere molti fenomeni fonologici. Un cammino in un grafo $G = (V, E)$ è una sequenza di nodi $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ tale che $(v_i, v_{i+1}) \in E$ per ogni i . La lunghezza del cammino è $n - 1$ (il numero di archi percorsi).

Nel contesto autosegmentale, i cammini attraverso il grafo di associazione rappresentano sequenze di dipendenze fonologiche. Ad esempio, un processo di armonia vocalica può essere modellizzato come la propagazione di un tratto lungo un cammino nel grafo: il tratto si diffonde da un nodo vocalico attraverso le linee di associazione al tier scheletrico, e da lì ad altri nodi vocalici.

La distanza tra due nodi in un grafo connesso è definita come la lunghezza del cammino più breve che li connette. Questa distanza grafica può essere interpretata fonologicamente come una misura della vicinanza strutturale tra elementi fonologici. Processi fonologici come l'assimilazione tipicamente operano tra elementi che sono vicini in termini di distanza grafica.

Un ciclo in un grafo è un cammino che inizia e termina nello stesso nodo. Nelle rappresentazioni autosegmentali standard, i cicli non sono generalmente permessi, riflettendo il fatto che le rappresentazioni fonologiche hanno una struttura temporale fondamentalmente lineare. Tuttavia, in alcune estensioni della teoria autosegmentale, cicli controllati possono essere utilizzati per rappresentare fenomeni di circolarità fonologica o di dipendenze ricorsive.

Grafi Pesati e Forza di Associazione

Un'estensione naturale della rappresentazione autosegmentale introduce pesi sugli archi del grafo. Un grafo pesato è una tupla $G = (V, E, w)$ dove $w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione peso che assegna a ogni arco un valore reale positivo. Nel contesto fonologico, i pesi possono rappresentare la forza o la stabilità delle linee di associazione.

Associazioni più forti (con peso maggiore) sono meno suscettibili di essere cancellate o modificate dai processi fonologici, mentre associazioni più deboli (con peso minore) possono essere più facilmente alterate. Ad esempio, le associazioni che risultano da processi di spreading recenti potrebbero avere peso minore rispetto alle associazioni lessicali originarie.

I pesi permettono anche di modellizzare processi di rafforzamento e indebolimento graduale delle associazioni. Un processo di lenizione potrebbe essere rappresentato come una funzione che riduce i pesi delle associazioni consonantiche, mentre un processo di fortificazione aumenterebbe questi pesi. Formalmente, se ϕ è un processo di lenizione, allora:

$$w'(e) = w(e) - \Delta \text{ per ogni } e \in E_{\text{consonanti}}$$

dove $\Delta > 0$ è il parametro di lenizione ed $E_{\text{consonanti}}$ è il sottoinsieme di archi che coinvolgono nodi consonantici.

La teoria dei grafi pesati fornisce anche algoritmi per trovare cammini di peso minimo, che possono essere interpretati come percorsi fonologici di minima resistenza. Un processo di diffusione tonale, ad esempio, potrebbe preferenzialmente seguire il cammino di peso minimo attraverso la rappresentazione autosegmentale, massimizzando l'efficienza del processo.

Alberi di Spreading e Spanning Trees

Molti processi autosegmentali, in particolare quelli di armonia e spreading, possono essere modellizzati utilizzando la nozione di albero ricoprente (spanning tree). Dato un grafo connesso $G = (V, E)$, uno spanning tree è un sottografo $T = (V, E')$ dove $E' \subseteq E$, tale che T è un albero (grafo connesso aciclico) che include tutti i nodi di G .

Nel contesto dello spreading tonale o vocalico, lo spanning tree rappresenta la struttura minimale di associazioni necessaria per propagare un tratto attraverso un dominio fonologico. L'algoritmo di Kruskal o l'algoritmo di Prim possono essere utilizzati per costruire spanning trees di peso minimo, che corrispondono alle configurazioni di spreading più efficienti.

Formalmente, dato un grafo pesato $G = (V, E, w)$, uno spanning tree di peso minimo $T = (V, E')$ minimizza la somma totale dei pesi:

$$W(T) = \sum_{\{e \in E'\}} w(e)$$

Algoritmi efficienti per trovare spanning trees di peso minimo hanno complessità computazionale $O(E \log V)$, dove $|V|$ è il numero di nodi ed $|E|$ è il numero di archi, rendendoli computazionalmente trattabili anche per rappresentazioni fonologiche complesse.

Grafi Multistrato e Rappresentazioni Prosodiche

Le estensioni più recenti della fonologia autosegmentale riconoscono che le rappresentazioni fonologiche comprendono non solo tier melodici e scheletrici, ma anche strutture prosodiche gerarchiche (sillabe, piedi metrici, parole fonologiche, frasi fonologiche). Queste strutture prosodiche possono essere modellizzate come grafi multistrato, dove ogni strato rappresenta un livello della gerarchia prosodica.

Formalmente, un grafo multistrato è una tupla $G = (V_1, V_2, \dots, V_n, E_{\text{intra}}, E_{\text{inter}})$ dove ciascun V_i rappresenta l'insieme dei nodi al livello i della gerarchia, $E_{\text{intra}} = \bigcup_i E_i$ rappresenta le connessioni all'interno di ogni livello, ed E_{inter} rappresenta le connessioni tra livelli diversi.

Le connessioni intralayer E_{intra} corrispondono a relazioni di precedenza temporale o di coordinazione tra elementi dello stesso livello prosodico. Le connessioni interlayer E_{inter} corrispondono a relazioni di dominanza o di appartenenza tra livelli diversi: ad esempio, una sillaba domina i segmenti che la compongono, e un piede metrico domina le sillabe che lo costituiscono.

I vincoli prosodici possono essere formulati come vincoli sulla struttura del grafo multistrato. Ad esempio, il vincolo secondo cui una sillaba deve contenere esattamente un nucleo vocalico può essere espresso richiedendo che ogni nodo sillabico $n_i \in V_{\text{sillabe}}$ abbia esattamente un arco in E_{inter} che lo connette a un nodo vocalico in V_{segmenti} .

Algoritmi di Parsing Fonologico come Ricerca su Grafi

Il problema del parsing fonologico, ovvero quello di assegnare una struttura fonologica completa a una sequenza di input, può essere formulato come un problema di ricerca su grafi. Data una sequenza di input $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, il parser deve costruire un grafo autosegmentale $G = (V, E)$ che soddisfi tutti i vincoli di buona formazione e che sia coerente con l'input.

Questo problema può essere modellizzato come una ricerca in uno spazio di stati, dove ogni stato rappresenta una rappresentazione fonologica parziale, e le transizioni tra stati corrispondono ad azioni del parser (come aggiungere una linea di associazione, creare un nodo prosodico, ecc.). L'obiettivo è trovare un cammino nello spazio di stati che porti da uno stato iniziale vuoto a uno stato finale che rappresenta una rappresentazione fonologica completa e ben formata.

Algoritmi di ricerca standard come la ricerca in ampiezza (breadth-first search) o la ricerca A^* possono essere adattati per il parsing fonologico. L'algoritmo A^* utilizza una funzione euristica $h(s)$ che stima il costo di completare la rappresentazione a partire dallo stato s . Nel contesto fonologico, questa euristica potrebbe basarsi su metriche come il numero di violazioni di vincoli nella rappresentazione parziale o la distanza stimata da una configurazione ben formata.

La complessità computazionale del parsing fonologico dipende criticamente dalla struttura dei vincoli. Se i vincoli sono formulati in modo da garantire che il grafo risultante sia planare e abbia grado limitato, allora esistono algoritmi di parsing efficienti con complessità polinomiale. Tuttavia, se i vincoli permettono strutture arbitrariamente complesse, il problema del parsing può diventare NP-completo.

Teoria Spettrale dei Grafi Fonologici

La teoria spettrale dei grafi studia le proprietà degli autovalori e degli autovettori delle matrici associate a grafi. Nel contesto fonologico, questa teoria può rivelare proprietà strutturali profonde delle rappresentazioni autosegmentali.

Data un grafo $G = (V, E)$, possiamo definire diverse matrici associate. La matrice di adiacenza A è una matrice $|V| \times |V|$ dove $A_{ij} = 1$ se $(v_i, v_j) \in E$ e $A_{ij} = 0$ altrimenti. La matrice laplaciana L è definita come $L = D - A$, dove D è la matrice diagonale dei gradi: $D_{ii} = \deg(v_i)$.

Gli autovalori della matrice laplaciana forniscono informazioni sulla connettività e sulla struttura del grafo. L'autovalore più piccolo (lo zero) è sempre presente, e la molteplicità di questo autovalore è pari al numero di componenti connesse del grafo. Il secondo autovalore più piccolo, noto come gap spettrale o algebraic connectivity, misura quanto bene il grafo è connesso.

Nel contesto fonologico, un gap spettrale grande indica che la rappresentazione autosegmentale è fortemente connessa e resistente a disconnessioni. Questo potrebbe correlare con la stabilità fonologica: rappresentazioni con alta connettività algebrica sono meno suscettibili a processi di elisione o cancellazione che potrebbero frammentare la struttura.

Gli autovettori della matrice laplaciana possono essere utilizzati per partizionare il grafo in comunità o cluster. Nel contesto fonologico, queste partizioni potrebbero rivelare domini naturali di processi fonologici, come i domini di armonia vocalica o i domini tonali.

Teoria delle Categorie e Funtori Autosegmentali

Un approccio molto astratto alla fonologia autosegmentale utilizza la teoria delle categorie per formalizzare le relazioni tra rappresentazioni a diversi livelli. In questo framework, ogni tier autosegmentale è un oggetto in una categoria, e i morfismi tra oggetti rappresentano relazioni strutturali o trasformazioni fonologiche.

Formalmente, possiamo definire una categoria Aut dove gli oggetti sono tier fonologici (insiemi di nodi con struttura) e i morfismi sono funzioni che preservano la struttura tra tier. Una rappresentazione autosegmentale completa è allora un diagramma in questa categoria, ovvero una collezione di oggetti e morfismi che soddisfano certe condizioni di compatibilità.

I processi fonologici possono essere modellizzati come funtori tra categorie autosegmentali. Un funtore $F: Aut_1 \rightarrow Aut_2$ mappa rappresentazioni in un sistema fonologico a rappresentazioni in un altro sistema, preservando la struttura categoriale. Ad esempio, un processo di neutralizzazione potrebbe essere rappresentato come un funtore che collassa distinzioni nel tier melodico mantenendo la struttura del tier scheletrico.

Un concetto particolarmente potente è quello di trasformazione naturale tra funtori. Una trasformazione naturale $\eta: F \rightarrow G$ è una famiglia di morfismi che connettono le immagini di due funtori in modo compatibile con la struttura categoriale. Nel contesto fonologico, le trasformazioni naturali possono rappresentare relazioni sistematiche tra processi fonologici diversi, catturando il fatto che certi processi sono varianti di un pattern più generale.

Teoria dell'Ottimalità come Ottimizzazione Vincolata

La Teoria dell'Ottimalità (Optimality Theory, OT), sviluppata da Alan Prince e Paul Smolensky nei primi anni Novanta, rappresenta un paradigma radicalmente diverso per concepire la grammatica fonologica. Invece di formulare la fonologia come un sistema di regole che trasformano rappresentazioni sottostanti in rappresentazioni superficiali, la OT concepisce la fonologia come un sistema di vincoli universali in competizione, risolti mediante un ordinamento gerarchico. Questa prospettiva apre la strada a una formalizzazione della fonologia in termini di teoria dell'ottimizzazione matematica.

Architettura Formale della Teoria dell'Ottimalità

Nel framework della OT, una grammatica fonologica consiste di tre componenti principali: una funzione GEN (Generator) che genera un insieme di candidati output possibili a partire da un input, un insieme CON di vincoli universali che valutano i candidati, e una funzione EVAL (Evaluator) che seleziona il candidato ottimale in base all'ordinamento dei vincoli.

Formalmente, dato un input i , la funzione GEN produce un insieme (potenzialmente infinito) di candidati:

$$\text{GEN}(i) = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}$$

Ogni candidato è una possibile realizzazione fonologica dell'input. L'insieme $\text{CON} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ consiste di vincoli che possono essere violati. Ogni vincolo C_i definisce una funzione di violazione $v_i: \text{GEN}(i) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ che assegna a ogni candidato il numero di volte che quel vincolo viene violato (con ∞ che indica una violazione fatale o infinita).

L'ordinamento dei vincoli è rappresentato da una relazione d'ordine totale $>$ su CON. Se $C_i > C_j$, diciamo che il vincolo C_i è più alto o domina il vincolo C_j nell' gerarchia. La funzione EVAL seleziona come output il candidato che viola minimamente i vincoli secondo l'ordinamento gerarchico.

Più precisamente, EVAL implementa un confronto lessicografico: per decidere tra due candidati c e c' , si confrontano prima le violazioni del vincolo più alto. Se c viola C_1 meno di c' , allora c vince indipendentemente da come i due candidati si comportano rispetto ai vincoli più bassi. Solo se c e c' hanno lo stesso numero di violazioni di C_1 si procede a considerare C_2 , e così via.

Formalmente, possiamo definire una relazione di ordinamento $<_H$ sui candidati (dove $H = (C_1 > C_2 > \dots > C_n)$ è la gerarchia dei vincoli) ponendo $c <_H c'$ se e solo se esiste un indice k tale che $v_k(c) < v_k(c')$ e $v_j(c) = v_j(c')$ per ogni $j < k$. Il candidato ottimale è il minimo rispetto a questo ordinamento:

$$\text{EVAL}(\text{GEN}(i), H) = \min_{<_H} \text{GEN}(i)$$

Geometria degli Spazi di Candidati

L'insieme dei candidati $\text{GEN}(i)$ può essere concepito come uno spazio geometrico le cui dimensioni corrispondono ai diversi vincoli. Ogni candidato c può essere rappresentato come un punto in uno spazio n -dimensionale $\mathbb{R}^n$ (o più precisamente $\mathbb{N}^n$), dove la coordinata j -esima è $v_j(c)$, il numero di violazioni del vincolo C_j da parte di c .

Questa rappresentazione geometrica rivela che la funzione EVAL implementa essenzialmente una ricerca del punto lessicograficamente minimo in questo spazio. La struttura dell'ordinamento lessicografico induce una partizione dello spazio dei candidati in regioni di equivalenza, dove tutti i candidati in una regione hanno lo stesso numero di violazioni per i vincoli più alti.

Possiamo visualizzare questa struttura per il caso di due vincoli. Lo spazio dei candidati è il piano $N \times N$, dove l'asse x rappresenta le violazioni di C_1 e l'asse y rappresenta le violazioni di C_2 . Se $C_1 > C_2$, allora l'ordinamento lessicografico privilegia candidati con basse coordinate x , e solo a parità di coordinate x considera le coordinate y . Le curve di livello di questo ordinamento sono segmenti verticali: tutti i candidati con la stessa coordinata x sono equivalenti rispetto al vincolo dominante.

Tableaux e Matrici di Violazione

Nella pratica dell'analisi in OT, i confronti tra candidati sono tipicamente rappresentati mediante tableaux, tabelle che mostrano i candidati in righe e i vincoli (ordinati gerarchicamente) in colonne. Ogni cella contiene il numero (o un simbolo indicante il numero) di violazioni del vincolo corrispondente da parte del candidato corrispondente.

Formalmente, un tableau può essere rappresentato come una matrice di violazione V dove $V_{\{ic\}}$ è il numero di violazioni del vincolo C_i da parte del candidato c . Data la gerarchia dei vincoli $H = (C_1 > C_2 > \dots > C_n)$, il candidato ottimale può essere identificato applicando l'algoritmo lessicografico alle righe di V .

L'algebra matriciale fornisce strumenti per analizzare le proprietà dei tableaux. Ad esempio, possiamo definire una norma lessicografica su vettori di violazioni: dato un vettore $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, la sua norma lessicografica rispetto all'ordinamento H è il valore:

$$\|v\|_H = \sum_{i=1}^n v_i \cdot M^{n-i}$$

dove M è un intero sufficientemente grande (ad esempio $M > \max_c \max_i v_i(c)$). Questa norma ha la proprietà che $\|v\|_H < \|v'\|_H$ se e solo se v è lessicograficamente minore di v' .

Con questa norma, la selezione del candidato ottimale diventa un problema di minimizzazione numerica standard:

$$\text{EVAL}(\text{GEN}(i), H) = \text{argmin}_{\{c \in \text{GEN}(i)\}} \|V_c\|_H$$

dove V_c è il vettore di violazioni del candidato c .

Topologie di Ranking e Spazi delle Grammatiche

Una questione centrale nella OT è quella dell'apprendimento grammaticale: come può un apprendente determinare l'ordinamento corretto dei vincoli a partire da dati empirici? Questa domanda può essere formalizzata geometricamente considerando lo spazio di tutte le possibili gerarchie di vincoli.

Dato un insieme di n vincoli, ci sono $n!$ possibili ordinamenti totali. Ciascuno di questi ordinamenti definisce una grammatica diversa. Possiamo rappresentare lo spazio delle grammatiche come un insieme discreto di punti, ciascuno corrispondente a un ordinamento.

Tuttavia, una rappresentazione più ricca considera le gerarchie parzialmente ordinate, dove non tutti i vincoli sono necessariamente ordinati tra loro. Lo spazio delle gerarchie parziali forma un reticolo (lattice) parzialmente ordinato, dove la relazione d'ordine è data dal raffinamento: una gerarchia H' raffina H se ogni relazione di dominanza in H è preservata in H' .

Bruce Tesar e Paul Smolensky hanno sviluppato una teoria geometrica più continua considerando i pesi reali dei vincoli invece di ordinamenti discreti. In questa versione pesata della OT (nota come Harmonic Grammar), ogni vincolo C_i ha un peso reale $w_i \in \mathbb{R}^+$, e l'armonia (harmonia) di un candidato c è definita come:

$$H(c) = -\sum_i w_i \cdot v_i(c)$$

Il candidato ottimale è quello con armonia massima. Lo spazio delle grammatiche diventa quindi $\mathbb{R}^{+n}$, uno spazio continuo dove ogni punto rappresenta un'assegnazione di pesi ai vincoli.

La topologia di questo spazio ha proprietà interessanti. Grammatiche vicine (con vettori di pesi vicini nella norma euclidea) tendono a produrre output simili, ma non identici. Esistono regioni di equivalenza nello spazio dei pesi, ovvero regioni aperte dove tutte le grammatiche producono gli stessi output per tutti gli input. Queste regioni sono separate da ipersuperfici di decisione dove si verificano cambiamenti nei candidati ottimali.

Formalmente, dato un input i e due candidati $c, c' \in \text{GEN}(i)$, l'ipersuperficie di decisione $S_{\{c,c'\}}$ è l'insieme dei pesi w tali che c e c' hanno la stessa armonia:

$$S_{\{c,c'\}} = \{w \in \mathbb{R}^{+n} : \sum_i w_i (v_i(c') - v_i(c)) = 0\}$$

Questa è un iperpiano in $\mathbb{R}^n$. Lo spazio dei pesi è partizionato da questi iperpiani in celle convesse, ciascuna corrispondente a una diversa grammatica categoriale (nella versione discreta della OT).

Ottimizzazione Stocastica e OT Probabilistica

Un'estensione importante della OT introduce probabilità per modellare la variazione fonologica. Nella OT stocastica, sviluppata da Paul Boersma e altri, l'ordinamento dei vincoli non è fisso ma stocasticamente variabile. Ogni vincolo ha un valore di ranking continuo che fluttua secondo una distribuzione di probabilità (tipicamente gaussiana).

Formalmente, se r_i è il ranking value del vincolo C_i , supponiamo che $r_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ dove μ_i è il ranking medio e σ^2 è la varianza (comune a tutti i vincoli). Ad ogni valutazione di un input, i valori di ranking sono campionati dalle loro distribuzioni, e il candidato ottimale è determinato secondo l'ordinamento indotto da quei valori campionati.

La probabilità che un candidato c sia selezionato come output è data dall'integrale:

$$P(c | i) = \int_{\{R^n\}} 1_{\{c = \text{optimal}\}} \cdot \prod_i \varphi(r_i; \mu_i, \sigma^2) dr_i$$

dove $1_{\{c = \text{optimal}\}}$ è la funzione indicatrice che vale 1 se c è il candidato ottimale dato il vettore di ranking r , e $\varphi(\cdot; \mu, \sigma^2)$ è la densità gaussiana.

Questo integrale non ha generalmente una forma chiusa, ma può essere approssimato mediante simulazioni Monte Carlo o mediante tecniche di integrazione numerica. La distribuzione risultante $P(c | i)$ dipende dai parametri $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, che codificano l'ordinamento medio dei vincoli.

L'apprendimento stocastico in OT diventa allora un problema di stima dei parametri: dati esempi di input-output, l'obiettivo è stimare i parametri μ che massimizzano la likelihood dei dati. Questo può essere formulato come un problema di massima verosimiglianza:

$$\mu^* = \operatorname{argmax}_{\mu} \prod_{\{(i,o) \in \text{data}\}} P(o | i; \mu)$$

Algoritmi di ottimizzazione come la discesa del gradiente o il Gradual Learning Algorithm possono essere utilizzati per trovare μ^* .

Vincoli come Funzionali e Calcolo delle Variazioni

Una prospettiva ancora più matematica considera i vincoli in OT come funzionali su spazi di rappresentazioni fonologiche. Un funzionale è una funzione che mappa funzioni (o più generalmente oggetti infinito-dimensionali) a numeri reali.

Nel contesto fonologico, possiamo considerare le rappresentazioni fonologiche come funzioni continue o distribuzioni su intervalli temporali. Un candidato c potrebbe essere rappresentato come una funzione $c: [0, T] \rightarrow R^m$ dove T è la durata dell'enunciato e R^m è uno spazio di parametri articolatori. I vincoli diventano allora funzionali $C[c]$ che assegnano un "costo" a ogni funzione c .

Ad esempio, un vincolo di fedeltà che penalizza la deviazione dall'input potrebbe essere formulato come:

Modelli Dinamici della Produzione Articolatoria

Mentre le prospettive algebriche, geometriche e grafiche forniscono strumenti potenti per analizzare le strutture discrete dei sistemi fonologici, la produzione effettiva del linguaggio è un processo continuo e dinamico che si svolge nel tempo reale. I modelli dinamici della fonologia, ispirati dalla fisica matematica e dalla teoria dei sistemi dinamici, forniscono un framework per comprendere come le rappresentazioni fonologiche astratte si realizzino come traiettorie articolatorie concrete.

Task Dynamics e Teoria dei Gesti Articolatori

La teoria dei gesti articolatori, sviluppata principalmente da Catherine Browman e Louis Goldstein negli anni Ottanta e Novanta, concepisce i segmenti fonologici non come configurazioni statiche di tratti, ma come gesti articolatori dinamici, ovvero come traiettorie

nello spazio degli articolatori. Un gesto è definito come il movimento coordinato di un insieme di articolatori verso un obiettivo (target) articolatorio specifico.

Formalmente, lo stato del tratto vocale può essere rappresentato come un vettore $x(t) \in \mathbb{R}^n$ dove ciascuna componente rappresenta la posizione o la velocità di un articolatore (lingua, labbra, velum, laringe, ecc.). Un gesto g è specificato da un vettore di obiettivi target x_g e da parametri dinamici che controllano come gli articolatori si muovono verso questi obiettivi.

Il modello più comune per descrivere la dinamica di un gesto è quello di un oscillatore critico-smorzato di secondo ordine. Per ogni grado di libertà articolatorio i , la dinamica è governata dall'equazione differenziale:

$$m_i \cdot \ddot{x}_i + b_i \cdot \dot{x}_i + k_i \cdot (x_i - x_{\{g,i\}}) = 0$$

dove m_i è la massa effettiva dell'articolatore, b_i è il coefficiente di smorzamento, k_i è la costante di rigidità, e $x_{\{g,i\}}$ è la posizione target per quel grado di libertà. Questa equazione descrive un sistema massa-molla-smorzatore che si muove verso la posizione di equilibrio $x_{\{g,i\}}$.

Possiamo riscrivere questa equazione in forma standard ponendo $\omega_i^2 = k_i/m_i$ (frequenza naturale al quadrato) e $\zeta_i = b_i/(2\sqrt{m_i k_i})$ (rapporto di smorzamento):

$$\ddot{x}_i + 2\zeta_i\omega_i \cdot \dot{x}_i + \omega_i^2 \cdot (x_i - x_{\{g,i\}}) = 0$$

Per un sistema criticamente smorzato ($\zeta = 1$), la soluzione di questa equazione differenziale è:

$$x_i(t) = x_{\{g,i\}} + (x_{\{i,0\}} - x_{\{g,i\}} + \dot{x}_{\{i,0\}}t) \cdot e^{-\omega_i t}$$

dove $x_{\{i,0\}}$ e $\dot{x}_{\{i,0\}}$ sono le condizioni iniziali di posizione e velocità. Questa soluzione descrive un movimento asintotico verso il target $x_{\{g,i\}}$, con una dinamica temporale controllata dal parametro ω_i .

Coordinazione Intergestuale e Grafi di Accoppiamento

Un aspetto cruciale della produzione del linguaggio è la coordinazione tra gesti multipli. Quando produciamo una sequenza di segmenti, non eseguiamo semplicemente i gesti uno dopo l'altro in modo seriale, ma li coordiniamo in maniera complessa, con sovrapposizioni temporali (coarticolazione) e sincronizzazioni precise.

La coordinazione intergestuale può essere modellizzata mediante grafi di accoppiamento, dove i nodi rappresentano gesti individuali e gli archi rappresentano relazioni di coordinazione. Un arco tra il gesto g_1 e il gesto g_2 è etichettato con un parametro $\phi \in [0, 1]$ che specifica la fase relativa di attivazione: $\phi = 0$ indica che g_2 inizia quando g_1 inizia, $\phi = 1$ indica che g_2 inizia quando g_1 termina, e valori intermedi indicano sovrapposizioni parziali.

Formalmente, se $t_i(g)$ è il tempo di inizio del gesto g e $\tau(g)$ è la sua durata, allora la relazione di coordinazione ϕ tra g_1 e g_2 impone il vincolo:

$$t_i(g_2) = t_i(g_1) + \varphi \cdot \tau(g_1)$$

Un insieme di n gesti con m relazioni di coordinazione definisce un sistema di equazioni che determina i tempi relativi di tutti i gesti. Questo sistema può essere rappresentato matricialmente come:

$$\Phi t = c$$

dove Φ è una matrice $m \times n$ che codifica le relazioni di coordinazione, t è il vettore dei tempi di inizio, e c è un vettore di costanti che dipende dalle durate dei gesti.

Se il sistema è sovradeterminato (più vincoli di coordinazione che gradi di libertà temporali), possiamo cercare una soluzione ai minimi quadrati che minimizza l'errore totale di coordinazione:

$$t^* = \operatorname{argmin}_t \|\Phi t - c\|^2$$

Questa formulazione connette la teoria dei gesti alla teoria dell'ottimizzazione, suggerendo che il sistema nervoso risolve problemi di coordinazione temporale mediante minimizzazione di funzioni di costo.

Spazi di Fase e Attrattori Dinamici

La prospettiva dei sistemi dinamici fornisce strumenti potenti per analizzare la stabilità e la variabilità della produzione articolatoria. Lo spazio di fase di un sistema dinamico è lo spazio i cui punti rappresentano tutti i possibili stati del sistema. Per un gesto articolatorio descritto dall'equazione differenziale di secondo ordine sopra menzionata, lo spazio di fase è bidimensionale per ogni grado di libertà, con coordinate $(x_i, \dot{x}_i)$.

L'evoluzione temporale del sistema corrisponde a una traiettoria nello spazio di fase. Il punto di equilibrio $(x_{\{g,i\}}, 0)$ è un attrattore: tutte le traiettorie convergono asintoticamente verso questo punto. La natura dell'attrattore dipende dal rapporto di smorzamento ζ : per $\zeta = 1$ (smorzamento critico) l'attrattore è un nodo stabile, per $\zeta < 1$ (sottosmorzato) è un fuoco stabile, e per $\zeta > 1$ (sovrasmorzato) è ancora un nodo stabile ma con dinamica più lenta.

In sistemi più complessi con accoppiamento tra gradi di libertà, lo spazio di fase diventa multidimensionale e possono emergere attrattori più complessi. Un sistema con n gradi di libertà, ciascuno descritto da un'equazione di secondo ordine, ha uno spazio di fase $2n$ -dimensionale.

La stabilità di un attrattore può essere analizzata mediante linearizzazione intorno al punto di equilibrio. Consideriamo piccole perturbazioni $\delta x = x - x_{eq}$ intorno all'equilibrio. L'evoluzione delle perturbazioni è governata dall'equazione linearizzata:

$$\delta \ddot{x} + 2\zeta\omega \cdot \delta \dot{x} + \omega^2 \cdot \delta x = 0$$

Gli autovalori della matrice jacobiana associata sono:

$$\lambda = -\zeta\omega \pm \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Per $\zeta = 1$, abbiamo $\lambda = -\omega$ (autovalore reale doppio negativo), confermando che l'equilibrio è stabile. Il tempo caratteristico di rilassamento verso l'equilibrio è $\tau = 1/\omega$.

Dinamica del Coupling e Sincronizzazione di Fase

Quando molteplici gesti sono accoppiati, le loro dinamiche si influenzano reciprocamente, potenzialmente dando luogo a fenomeni di sincronizzazione. La teoria della sincronizzazione, sviluppata nella fisica dei sistemi dinamici, fornisce strumenti per analizzare questi fenomeni.

Consideriamo due gesti g_1 e g_2 , ciascuno descritto come un oscillatore. Possiamo introdurre un termine di accoppiamento che modifica le equazioni del moto:

$$\ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1 \cdot \dot{x}_1 + \omega_1^2 \cdot (x_1 - x_{\{g_1\}}) = K \cdot (x_2 - x_1) \quad \ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2 \cdot \dot{x}_2 + \omega_2^2 \cdot (x_2 - x_{\{g_2\}}) = K \cdot (x_1 - x_2)$$

dove K è la costante di accoppiamento. Questo sistema di equazioni accoppiate descrive come i due gesti si influenzino reciprocamente.

Per analizzare la sincronizzazione, è utile introdurre variabili di fase. Per un oscillatore armonico smorzato, la fase $\theta(t)$ può essere definita come l'angolo nel piano $(x, \dot{x})$ rispetto a coordinate opportune. La differenza di fase $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ evolve secondo un'equazione differenziale che può essere approssimata, nel regime di accoppiamento debole, come:

$$d(\Delta\theta)/dt = \Delta\omega + K \cdot \sin(\Delta\theta)$$

dove $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ è la differenza tra le frequenze naturali. Questa è l'equazione di Kuramoto-Sakaguchi per la sincronizzazione di fase.

I punti fissi di questa equazione sono dati da $\sin(\Delta\theta^*) = -\Delta\omega/K$. Se $|\Delta\omega| < |K|$, esistono due punti fissi, uno stabile e uno instabile, e il sistema si sincronizza con una differenza di fase costante. Se $|\Delta\omega| > |K|$, non ci sono punti fissi e le fasi continuano a derivare l'una rispetto all'altra.

Questa analisi suggerisce che la coordinazione intergestuale emerge naturalmente dall'accoppiamento dinamico quando gli oscillatori hanno frequenze simili e l'accoppiamento è sufficientemente forte. Fenomeni di coarticolazione possono essere interpretati come manifestazioni di questa sincronizzazione parziale.

Campi Potenziali e Paesaggi di Energia

Un approccio complementare modella gli spazi articolatori come paesaggi di energia, dove i gesti corrispondono a movimenti in questi paesaggi verso minimi di energia. Un campo potenziale $U(x)$ è una funzione che assegna un'energia potenziale a ogni configurazione articolatoria x . La dinamica è allora governata dall'equazione:

$$m\ddot{x} = -\nabla U(x) - b\dot{x}$$

dove $-\nabla U(x)$ è la forza derivata dal potenziale e $-b\dot{x}$ è la forza di smorzamento. Il sistema tende a muoversi verso i minimi del potenziale U .

Per un singolo gesto con target x_g , un potenziale semplice è quello armonico:

$$U(x) = (1/2)k \cdot \|x - x_g\|^2$$

che produce una forza $F = -k(x - x_g)$, riconducendoci all'equazione dell'oscillatore armonico.

Configurazioni più complesse con gesti multipli possono essere modellizzate sommando contributi potenziali:

$$U(x) = \sum_i U_i(x) = \sum_i (1/2)k_i \cdot \|x - x_{\{g_i\}}\|^2$$

Il paesaggio energetico risultante ha multipli attrattori corrispondenti ai diversi target gestuali. Le barriere energetiche tra attrattori determinano la stabilità relativa delle configurazioni e le probabilità di transizione tra gesti.

La dinamica in un paesaggio con barriere può essere studiata mediante la teoria delle transizioni attivate. La probabilità di transizione da un minimo a un altro dipende dall'altezza della barriera ΔU secondo una legge di tipo Arrhenius:

$$P_{\{trans\}} \propto \exp(-\Delta U / k_B T)$$

dove k_B è la costante di Boltzmann e T è una "temperatura" effettiva che rappresenta il livello di rumore o variabilità nel sistema.

Risonanze del Tratto Vocale e Spettri Acustici

La produzione articolatoria genera un segnale acustico il cui spettro è determinato dalle proprietà risonanti del tratto vocale. Il tratto vocale può essere modellizzato come un tubo acustico con geometria variabile, e le sue risonanze (formanti) dipendono dalla configurazione articolatoria.

L'equazione d'onda per la pressione acustica $p(x,t)$ in un tubo unidimensionale è:

$$\partial^2 p / \partial t^2 = c^2 \cdot \partial^2 p / \partial x^2$$

dove c è la velocità del suono. Con condizioni al contorno appropriate (ad esempio, estremità chiusa alla glottide e aperta alle labbra), questa equazione ha soluzioni modali con frequenze discrete (le formanti).

Per un tubo cilindrico uniforme di lunghezza L aperto a un'estremità, le frequenze modali sono:

$$f_n = (2n - 1) \cdot c / (4L)$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$. Queste sono le formanti del tubo: $F_1 = c/(4L)$, $F_2 = 3c/(4L)$, $F_3 = 5c/(4L)$, ecc.

Il tratto vocale reale ha una geometria non uniforme che può essere descritta dalla funzione di area $A(x)$, dove x è la distanza dalla glottide. La relazione tra le formanti e la funzione di

area è complessa e non lineare, ma può essere approssimata mediante tecniche di perturbazione.

Una teoria importante, sviluppata da Gunnar Fant, utilizza l'approssimazione del tubo concatenato, dove il tratto vocale è modellizzato come una sequenza di N segmenti cilindrici, ciascuno con area A_i e lunghezza l_i . Le formanti possono essere calcolate risolvendo un sistema di equazioni che descrivono la propagazione delle onde attraverso i segmenti.

La matrice di trasferimento per un segmento è:

$$T_i = \begin{bmatrix} \cos(k_i l_i) & -j Z_i \sin(k_i l_i) \\ [-j \sin(k_i l_i)/Z_i & \cos(k_i l_i) \end{bmatrix}$$

dove $k_i = \omega/c$ è il numero d'onda, $Z_i = \rho c/A_i$ è l'impedenza caratteristica, ρ è la densità dell'aria, e j è l'unità immaginaria. La matrice di trasferimento totale è il prodotto:

$$T = T_N \cdot T_{N-1} \cdot \dots \cdot T_1$$

Le formanti corrispondono alle frequenze dove l'impedenza di ingresso del sistema diverge, ovvero dove il determinante di una matrice derivata da T si annulla.

Modelli Articulatory-Acoustic e Mappature Non Lineari

La relazione tra configurazioni articolatorie e spettri acustici è fortemente non lineare e molti-a-uno: configurazioni articolatorie diverse possono produrre spettri acustici simili. Questa non linearità ha importanti conseguenze per la teoria fonologica, suggerendo che le categorie fonologiche potrebbero emergere dalle proprietà geometriche di questa mappatura.

Formalmente, possiamo definire una funzione di mappatura $F: A \rightarrow S$ dove A è lo spazio delle configurazioni articolatorie ed S è lo spazio degli spettri acustici. Per le vocali, A potrebbe essere parametrizzato dalle prime due formanti (F_1, F_2), e S dalle stesse coordinate (essendo le formanti sia parametri articolatori che acustici, sebbene la relazione non sia identità).

La mappatura F ha regioni di alta sensibilità, dove piccole variazioni articolatorie producono grandi cambiamenti acustici, e regioni di bassa sensibilità, dove grandi variazioni articolatorie producono cambiamenti acustici piccoli. La derivata $DF: T_a A \rightarrow T_{\{F(a)\}} S$ (il differenziale) misura questa sensibilità locale.

Le regioni di bassa sensibilità (dove $\|DF\|$ è piccolo) corrispondono a configurazioni articolatorie stabili: sono meno suscettibili a errori di produzione che potrebbero causare cambiamenti percettivi significativi. La teoria quantal, proposta da Kenneth Stevens, suggerisce che le categorie fonologiche tendono a emergere in corrispondenza di queste regioni quantali di stabilità acustica.

Matematicamente, possiamo caratterizzare le regioni quantali come quelle dove la norma di Frobenius della matrice jacobiana $J = DF$ è minimizzata:

$$\|J\|_F = \sqrt{\sum_i |J_i|^2}$$

I minimi locali di questa funzione corrispondono a configurazioni dove la sensibilità acustico-articolatoria è minima, e quindi dove è vantaggioso posizionare target fonologici.

Teoria del Controllo Ottimale e Traiettorie Articolatorie

La produzione di sequenze di gesti può essere formulata come un problema di controllo ottimale: dato un obiettivo acustico target e una configurazione articolatoria iniziale, qual è la traiettoria articolatoria ottimale che minimizza un certo costo (ad esempio, lo sforzo articolatorio) soggetta al vincolo di raggiungere il target?

Formalmente, sia $x(t)$ la traiettoria articolatoria e $u(t)$ il controllo (le forze muscolari applicate). La dinamica del sistema è governata da:

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

dove f descrive le equazioni del moto. Il problema è minimizzare un funzionale di costo:

$$J[x, u] = \int_0^T L(x(t), u(t), t) dt + \Phi(x(T))$$

soggetto alla dinamica e alle condizioni al contorno $x(0) = x_0$ e un vincolo sul valore finale $x(T)$.

Il primo termine integrale rappresenta il costo cumulativo lungo la traiettoria (ad esempio, l'energia spesa), mentre $\Phi(x(T))$ rappresenta un costo terminale (ad esempio, la deviazione dal target acustico desiderato).

Il principio del minimo di Pontryagin fornisce le condizioni necessarie per l'ottimalità. Introduciamo variabili aggiuntive $\lambda(t)$ (i moltiplicatori di Lagrange o costate) e definiamo l'Hamiltoniano:

$$H(x, u, \lambda, t) = L(x, u, t) + \lambda^T \cdot f(x, u, t)$$

Le condizioni di ottimalità sono:

$$\dot{x} = \partial H / \partial \lambda \quad \dot{\lambda} = -\partial H / \partial x \quad 0 = \partial H / \partial u$$

insieme alle condizioni al contorno. Questo sistema di equazioni differenziali accoppiate determina la traiettoria ottimale.

Per sistemi lineari con costo quadratico (problemi LQR: Linear Quadratic Regulator), la soluzione ha una forma particolarmente elegante. Se la dinamica è lineare $\dot{x} = Ax + Bu$ e il costo è quadratico $L = x^T Q x + u^T R u$, allora il controllo ottimale è un feedback lineare dello stato:

$$u^*(t) = -K(t) \cdot x(t)$$

dove $K(t)$ è la matrice di guadagno, soluzione di un'equazione di Riccati differenziale.

Questa formulazione suggerisce che il sistema nervoso potrebbe implementare strategie di controllo ottimale per pianificare e eseguire traiettorie articolatorie, bilanciando accuratezza e efficienza.

Approcci Stocastici e Diffusioni Articolatorie

La produzione articolatoria è intrinsecamente stocastica, soggetta a rumore neuromotorio e a variabilità biomeccanica. I modelli stocastici incorporano questa variabilità mediante equazioni differenziali stocastiche (SDE).

Un modello stocastico semplice per un gesto articolatorio è:

$$dx = a(x, t)dt + \sigma(x, t)dW$$

dove $a(x, t)$ è il drift (la dinamica deterministica), $\sigma(x, t)$ è la matrice di diffusione che controlla l'intensità del rumore, e dW è un incremento di processo di Wiener (rumore bianco gaussiano).

Per il modello dell'oscillatore critico con rumore additivo:

$$dx = v dt \quad dv = [-2\zeta\omega v - \omega^2(x - x_g)]dt + \sigma dW$$

La soluzione è un processo stocastico $x(t)$ la cui distribuzione di probabilità $p(x, v, t)$ evolve secondo l'equazione di Fokker-Planck:

$$\partial p / \partial t = -v \cdot \partial p / \partial x + \partial / \partial v [(2\zeta\omega v + \omega^2(x - x_g))p] + (\sigma^2/2) \cdot \partial^2 p / \partial v^2$$

Questa equazione alle derivate parziali descrive come la distribuzione di probabilità si propaga nel tempo. A lungo termine ($t \rightarrow \infty$), il sistema raggiunge una distribuzione stazionaria centrata sul target ma con dispersione determinata dall'intensità del rumore σ .

La variabilità articolatoria osservata empiricamente può essere analizzata alla luce di questi modelli stocastici. La covarianza della variabilità fornisce informazioni sulla struttura del rumore e sulle strategie di controllo utilizzate dal sistema nervoso.

Analisi Armonica e Rappresentazioni Spettrali

L'analisi armonica fornisce strumenti potenti per decomporre segnali fonologici complessi in componenti elementari, rivelando strutture periodiche e gerarchiche che altrimenti potrebbero rimanere nascoste. Nel contesto della fonologia matematica, le tecniche di analisi armonica trovano applicazione sia nell'analisi dei pattern fonologici astratti che nell'analisi dei segnali acustici concreti.

Trasformata di Fourier e Spettri Fonologici

La trasformata di Fourier è uno strumento fondamentale per passare dalla rappresentazione temporale alla rappresentazione spettrale di un segnale. Dato un segnale continuo $f(t)$, la sua trasformata di Fourier è:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

dove ω è la frequenza angolare e j è l'unità immaginaria. La trasformata inversa ricostruisce il segnale:

$$f(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

Questa decomposizione rivela le componenti frequenziali del segnale. Nel contesto acustico, $|F(\omega)|^2$ è lo spettro di potenza che mostra l'energia distribuita nelle diverse frequenze.

Per segnali discreti (come sequenze di fonemi campionati), si utilizza la trasformata di Fourier discreta (DFT):

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cdot e^{-j2\pi kn/N}$$

dove N è il numero di campioni. L'algoritmo della Fast Fourier Transform (FFT) calcola la DFT con complessità $O(N \log N)$ invece di $O(N^2)$, rendendo l'analisi spettrale computazionalmente efficiente anche per segnali lunghi.

Series di Fourier e Periodicità Fonologica

Molti pattern fonologici esibiscono strutture periodiche o quasi-periodiche. Ad esempio, l'alternanza di sillabe forti e deboli nella metrica poetica, o i pattern tonali ciclici in alcune lingue. Queste periodicità possono essere analizzate mediante serie di Fourier.

Se $f(t)$ è una funzione periodica con periodo T , può essere espressa come una serie:

$$f(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

dove $\omega_0 = 2\pi/T$ è la frequenza fondamentale e i coefficienti sono:

$$a_n = (2/T) \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad b_n = (2/T) \int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

In forma complessa:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\text{con } c_n = (1/T) \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

Nel contesto fonologico, possiamo applicare l'analisi di Fourier a sequenze simboliche codificando i simboli come numeri. Ad esempio, possiamo rappresentare una sequenza di sillabe forti (1) e deboli (0) e calcolare lo spettro per identificare periodicità metriche.

Wavelets e Analisi Multi-Risoluzione

Le trasformate wavelets forniscono un'alternativa alla trasformata di Fourier che è particolarmente adatta per segnali non stazionari con strutture a scale multiple. Una wavelet è una funzione $\psi(t)$ con media zero e localizzazione sia nel tempo che in frequenza.

La trasformata wavelet continua di un segnale $f(t)$ è:

$$W(a, b) = (1/\sqrt{a}) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \psi^*((t-b)/a) dt$$

dove a è il parametro di scala (inversamente proporzionale alla frequenza), b è il parametro di traslazione temporale, e ψ^* è il complesso coniugato della wavelet madre ψ .

Diverse wavelets madre sono utilizzate per diverse applicazioni. La wavelet di Morlet è particolarmente utile per l'analisi di segnali oscillatori:

$$\psi(t) = \pi^{-1/4} \cdot e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-t^2/2}$$

La wavelet di Haar è utile per rilevare discontinuità:

$$\psi(t) = 1 \text{ per } 0 \leq t < 1/2 \quad \psi(t) = -1 \text{ per } 1/2 \leq t < 1 \quad \psi(t) = 0 \text{ altrimenti}$$

Nel contesto della fonologia prosodica, le wavelets possono rivelare strutture gerarchiche: componenti a scala grande corrispondono a strutture prosodiche di alto livello (frasi intonazionali), mentre componenti a scala piccola corrispondono a strutture di basso livello (sillabe, segmenti).

Analisi Spettrale di Sequenze Fonologiche

Possiamo applicare tecniche di analisi spettrale direttamente a sequenze fonologiche astratte per identificare pattern ricorrenti. Consideriamo una sequenza di segmenti $s = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ dove ciascun s_i appartiene a un alfabeto finito Σ .

Possiamo codificare questa sequenza come una funzione numerica assegnando a ciascun simbolo $\sigma \in \Sigma$ un valore numerico $v(\sigma)$. Una codifica semplice è quella binaria per tratti: se σ è [+voice], allora $v(\sigma) = 1$, altrimenti $v(\sigma) = 0$.

Applicando la DFT alla sequenza codificata $\{v(s_1), v(s_2), \dots, v(s_N)\}$, otteniamo uno spettro che rivela periodicità nel pattern di sonorizzazione. Picchi nello spettro a una frequenza f indicano che il tratto di sonorità alterna con un periodo approssimativo di N/f segmenti.

Questa tecnica può essere utilizzata per rilevare pattern fonologici come l'armonia vocalica (che produce periodicità nei tratti vocalici) o le alternan

Teoria dei Grafi per le Reti Fonologiche

La teoria dei grafi fornisce un framework naturale per modellizzare le relazioni complesse tra elementi fonologici a diversi livelli di organizzazione. Oltre alle applicazioni autosegmentali già discusse, i grafi trovano impiego nell'analisi delle reti lessicali, delle gerarchie prosodiche, e delle dipendenze a lunga distanza nei sistemi fonologici.

Reti Lessicali e Grafi di Prossimità Fonologica

Il lessico mentale può essere concepito come un grafo dove i nodi rappresentano parole e gli archi rappresentano relazioni di similarità fonologica. Due parole sono connesse da un arco se differiscono minimamente, ad esempio per un solo segmento (coppie minime) o per un piccolo numero di tratti distintivi.

Formalmente, possiamo definire un grafo lessicale $G = (V, E)$ dove V è l'insieme delle parole nella lingua ed E è determinato da una metrica di distanza fonologica. Due parole $w_1, w_2 \in V$ sono connesse da un arco se $d(w_1, w_2) \leq \theta$, dove d è una distanza fonologica (ad esempio, la distanza di Levenshtein generalizzata che tiene conto delle sostituzioni, inserzioni e delezioni di segmenti) e θ è una soglia.

La distanza di Levenshtein ponderata tra due sequenze fonologiche $s = (s_1, \dots, s_m)$ e $t = (t_1, \dots, t_n)$ è definita ricorsivamente come:

$$d_L(s, t) = \min \{ d_L(s_{1:m-1}, t) + c_{\text{del}}(s_m), d_L(s, t_{1:n-1}) + c_{\text{ins}}(t_n), d_L(s_{1:m-1}, t_{1:n-1}) + c_{\text{sub}}(s_m, t_n) \}$$

dove c_{del} , c_{ins} , e c_{sub} sono i costi di delezione, inserzione e sostituzione. Nel contesto fonologico, questi costi possono essere calibrati sulla base della distanza di tratti: sostituire [p] con [b] (che differiscono solo per il tratto [voice]) ha un costo minore che sostituire [p] con [k] (che differiscono per il luogo di articolazione).

Le proprietà topologiche del grafo lessicale rivelano aspetti dell'organizzazione lessicale. La distribuzione dei gradi dei nodi (il numero di vicini fonologici di ciascuna parola) segue tipicamente una legge di potenza o una distribuzione log-normale, indicando che poche parole hanno molti vicini (parole fonologicamente dense) mentre molte parole hanno pochi vicini (parole fonologicamente isolate).

Il coefficiente di clustering medio:

$$C = (1/|V|) \sum_i (2E_i)/(k_i(k_i-1))$$

dove E_i è il numero di archi tra i vicini del nodo i e k_i è il grado del nodo i , misura quanto i vicini di una parola tendono a essere vicini tra loro. Valori elevati di C suggeriscono una struttura di "piccolo mondo" dove esistono cluster densamente connessi di parole fonologicamente simili.

Centralità e Influenza Fonologica

Le misure di centralità in teoria dei grafi quantificano l'importanza relativa dei nodi in una rete. Nel contesto lessicale, queste misure possono identificare parole che sono fonologicamente centrali o influenti.

La centralità di grado è semplicemente il numero di vicini di un nodo:

$$C_{\text{deg}}(v) = \text{deg}(v) = |\{u \in V : (v, u) \in E\}|$$

Parole con alta centralità di grado hanno molti vicini fonologici e potrebbero essere più suscettibili a errori di produzione o percezione per via della competizione lessicale.

La centralità di betweenness misura quanto un nodo si trova "tra" altri nodi nel grafo:

$$C_{\text{bet}}(v) = \sum_{\{s \neq v \neq t\}} (\sigma_{st}(v) / \sigma_{st})$$

dove σ_{st} è il numero totale di cammini minimi tra s e t , e $\sigma_{st}(v)$ è il numero di tali cammini che passano per v . Parole con alta betweenness collegano cluster lessicali diversi e potrebbero fungere da "ponti" nell'organizzazione lessicale.

La centralità di autovettore (eigenvector centrality) assegna importanza non solo in base al numero di connessioni, ma anche all'importanza dei vicini. È definita come la soluzione del sistema:

$$\lambda \cdot x_v = \sum_{u:(v,u) \in E} x_u$$

dove λ è l'autovalore massimo della matrice di adiacenza A e x è il corrispondente autovettore (normalizzato). Questo corrisponde a risolvere:

$$Ax = \lambda x$$

Parole con alta eigenvector centrality sono connesse a parole che sono a loro volta ben connesse, indicando una posizione di influenza nella rete lessicale.

Algoritmi di Community Detection per Classi Fonologiche

Gli algoritmi di community detection identificano sottoinsiemi di nodi densamente connessi all'interno di un grafo. Nel contesto fonologico, queste community potrebbero corrispondere a classi naturali o a famiglie fonologiche.

L'algoritmo di Louvain massimizza la modularità Q del grafo:

$$Q = (1/2m) \sum_i [A_{ii} - (k_i k_i / 2m)] \cdot \delta(c_i, c_i)$$

dove $m = |E|/2$ è il numero totale di archi, A_{ii} è l'elemento della matrice di adiacenza, k_i è il grado del nodo i , c_i è la community del nodo i , e $\delta(c_i, c_i) = 1$ se $c_i = c_i$ e 0 altrimenti.

La modularità misura la densità di archi all'interno delle community rispetto a quanto ci si aspetterebbe in un grafo random con la stessa distribuzione di gradi. Valori elevati di Q indicano una struttura comunitaria forte.

Applicato al grafo lessicale, questo algoritmo può identificare cluster di parole che condividono pattern fonologici comuni, rivelando potenzialmente classi naturali emergenti dalla struttura lessicale piuttosto che da definizioni a priori basate su tratti.

Grafi di Dipendenza Prosodica

Le strutture prosodiche gerarchiche (sillabe, piedi, parole fonologiche, frasi fonologiche) possono essere rappresentate come grafi orientati aciclici (DAG) dove i nodi rappresentano costituenti prosodici e gli archi rappresentano relazioni di dominanza o contenimento.

Formalmente, un albero prosodico è un DAG $T = (V, E)$ dove ogni nodo ha al massimo un genitore (eccetto la radice che non ha genitori) e dove gli archi sono orientati dalla radice verso le foglie. I nodi foglia corrispondono ai segmenti o alle more, mentre i nodi interni corrispondono a costituenti di livello superiore.

Un vincolo fondamentale nella teoria prosodica è la Strict Layer Hypothesis, che richiede che la gerarchia prosodica sia strettamente stratificata: un costituente di livello n può dominare solo costituenti di livello $n-1$. Questo si traduce in un vincolo sul grafo: non ci possono essere archi che "saltano" livelli.

Formalmente, se assegniamo a ogni nodo v un livello $l(v) \in \{0, 1, \dots, L\}$ dove 0 è il livello dei segmenti e L è il livello della frase intonazionale, allora la Strict Layer Hypothesis richiede che per ogni arco $(u, v) \in E$:

$$l(u) = l(v) + 1$$

Violazioni di questo vincolo (come la ricorsività prosodica, dove un costituente contiene un costituente dello stesso livello) possono essere modellizzate permettendo archi che violano questa condizione, introducendo una metrica di "violazione di stratificazione".

Grafi Bipartiti per Sistemi di Armonia

I sistemi di armonia fonologica (vocalica, consonantica, tonale) possono essere elegantemente modellizzati mediante grafi bipartiti. In un sistema di armonia vocalica, ad esempio, possiamo definire due insiemi di nodi: V (le vocali) e P (le posizioni nella parola). Un arco tra $v \in V$ e $p \in P$ indica che la vocale v può apparire nella posizione p .

I vincoli di armonia impongono restrizioni sulla struttura di questo grafo bipartito. Ad esempio, in un sistema di armonia ATR (Advanced Tongue Root), le vocali sono partizionate in due classi $[+ATR]$ e $[-ATR]$, e un vincolo di armonia richiede che tutte le vocali in una parola appartengano alla stessa classe. Questo può essere formalizzato richiedendo che il sottografo indotto dalle posizioni occupate in una parola sia connesso solo a nodi vocalici di una stessa classe.

Formalmente, se $W = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ è l'insieme delle posizioni in una parola, allora il vincolo di armonia richiede che il sottografo indotto $G[W] = (V_W, E_W)$ dove $V_W = \{v \in V : \exists p \in W, (v, p) \in E\}$ sia contenuto interamente in una classe di armonia.

I matching in grafi bipartiti forniscono un framework per comprendere le assegnazioni ottimali di vocali a posizioni. Un matching è un sottoinsieme $M \subseteq E$ tale che nessun nodo è incidente a più di un arco in M . Un matching perfetto assegna esattamente una vocale a ciascuna posizione. Il problema di trovare un matching perfetto che massimizzi qualche funzione obiettivo (ad esempio, minimizzi le violazioni di vincoli fonologici) è il problema del matching pesato massimo, risolvibile in tempo polinomiale mediante l'algoritmo ungherese.

Grafi Temporal e Dinamica Fonologica

I processi di cambiamento fonologico nel tempo possono essere modellizzati mediante grafi temporali, dove la struttura del grafo evolve nel tempo. Un grafo temporale è una sequenza $G(t) = (V(t), E(t))$ dove sia i nodi che gli archi possono cambiare al variare di t .

Nel contesto del cambiamento fonologico diacronico, i nodi potrebbero rappresentare varianti fonetiche di un fonema, e gli archi potrebbero rappresentare relazioni di derivazione

storica o di coesistenza sincronica. La struttura del grafo evolve quando nuove varianti emergono, vecchie varianti si estinguono, o le relazioni tra varianti cambiano.

Un modello semplice di diffusione lessicale del cambiamento fonologico può essere formulato come un processo di percolazione su un grafo lessicale. Inizialmente, un piccolo numero di parole adotta un'innovazione fonologica. Poi, l'innovazione si diffonde attraverso gli archi del grafo lessicale: una parola adotta l'innovazione con probabilità proporzionale al numero di vicini che hanno già adottato l'innovazione.

Formalmente, sia $x_i(t) \in \{0, 1\}$ lo stato della parola i al tempo t (0 = forma conservativa, 1 = forma innovativa). L'evoluzione è governata da:

$$P(x_i(t+1) = 1 \mid x(t)) = f(\sum_j A_{ij} x_j(t))$$

dove A_{ij} è la matrice di adiacenza del grafo lessicale e f è una funzione crescente (ad esempio, $f(s) = 1/(1 + e^{-(\beta(s-\theta))})$ con parametri β e θ).

Questo modello può spiegare curve sigmoidi di diffusione lessicale osservate empiricamente: l'innovazione si diffonde lentamente all'inizio, poi accelera quando raggiunge una massa critica, e infine rallenta quando satura la maggior parte del lessico.

Automi a Stati Finiti e Transduttori Fonologici

Gli automi a stati finiti (FSA) e i transduttori a stati finiti (FST) forniscono modelli computazionali per processi fonologici. Un FSA è un grafo orientato $G = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dove Q è l'insieme degli stati, Σ è l'alfabeto, $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ è la funzione di transizione, $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale, e $F \subseteq Q$ è l'insieme degli stati finali.

Un FSA riconosce un linguaggio (insieme di stringhe) $L \subseteq \Sigma^*$. Una stringa $w = w_1 w_2 \dots w_n$ è accettata se esiste una sequenza di stati $q_0, q_1, \dots, q_n$ tale che $\delta(q_{i-1}, w_i) = q_i$ per ogni i e $q_n \in F$.

Nel contesto fonologico, gli FSA possono modellizzare vincoli fonologici come vincoli di sequenza. Ad esempio, un vincolo che vieta sequenze di tre consonanti consecutive può essere rappresentato da un FSA che va in uno stato di errore dopo aver visto tre consonanti senza vocali interposte.

I transduttori a stati finiti (FST) generalizzano gli FSA implementando mappature tra stringhe. Un FST è una tupla $G = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \lambda, q_0, F)$ dove Γ è l'alfabeto di output, $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ è la funzione di transizione, e $\lambda: Q \times \Sigma \rightarrow \Gamma^*$ è la funzione di output.

Un FST implementa una relazione $R \subseteq \Sigma^* \times \Gamma^*$. La coppia $(w, z) \in R$ se esiste un percorso attraverso il transduttore che legge w e produce z . Nel contesto fonologico, gli FST possono implementare regole fonologiche: l'input è una rappresentazione sottostante e l'output è la corrispondente rappresentazione superficiale.

Un risultato importante, dovuto a Ronald Kaplan e Martin Kay, è che le regole fonologiche standard possono essere compilate in FST. Inoltre, la composizione di FST corrisponde

all'applicazione sequenziale di regole, e l'inverso di un FST implementa la mappatura inversa (dalla superficie alla sottostante).

La complessità computazionale del riconoscimento mediante FSA è $O(n)$ dove n è la lunghezza dell'input, rendendo gli FSA molto efficienti. La composizione di FST ha complessità $O(n \cdot |Q_1| \cdot |Q_2|)$ dove $|Q_1|$ e $|Q_2|$ sono i numeri di stati dei due transduttori.

Grafi Ponderati e Fonologia Probabilistica

Estendendo gli FST con pesi probabilistici si ottengono transduttori stocastici a stati finiti (SFST), che implementano distribuzioni di probabilità su mappature input-output. Un SFST assegna a ogni transizione una probabilità, e la probabilità di una derivazione è il prodotto delle probabilità delle transizioni.

Formalmente, un SFST include una funzione di probabilità $p: Q \times \Sigma \times \Gamma^* \times Q \rightarrow [0, 1]$ che assegna a ogni transizione una probabilità tale che per ogni stato q :

$$\sum_{\{a \in \Sigma, b \in \Gamma^*, q' \in Q\}} p(q, a, b, q') = 1$$

La probabilità di una coppia input-output (w, z) è la somma delle probabilità di tutte le derivazioni che mappano w in z :

$$P(w, z) = \sum_{\{\pi: w \rightarrow z\}} \prod_{\{\text{transizioni in } \pi\}} p(\text{transizione})$$

Gli SFST possono modellizzare variazione fonologica e processi opzionali assegnando probabilità diverse a diverse realizzazioni di un input. L'apprendimento degli SFST da dati empirici è un problema di stima dei parametri che può essere affrontato mediante l'algoritmo Expectation-Maximization (EM) o mediante tecniche di apprendimento discriminativo.

Trasformazioni Geometriche nei Processi Fonologici

I processi fonologici possono essere concepiti come trasformazioni geometriche che operano su spazi di rappresentazioni fonologiche. Questa prospettiva geometrica rivela simmetrie profonde e invarianti nei sistemi fonologici.

Assimilazione come Proiezione Geometrica

I processi di assimilazione, dove un segmento acquisisce proprietà da un segmento adiacente, possono essere modellizzati come proiezioni in uno spazio di tratti. Consideriamo uno spazio di tratti n -dimensionale dove ogni dimensione corrisponde a un tratto distintivo.

Se s_1 e s_2 sono due segmenti rappresentati come vettori in $\mathbb{R}^n$, un processo di assimilazione che rende s_1 identico a s_2 rispetto a un sottoinsieme di tratti può essere rappresentato come una proiezione. Sia P il sottospazio corrispondente ai tratti che si assimilano. La proiezione ortogonale di s_1 su P è:

$$\text{proj}_P(s_1) = P \cdot s_1$$

dove P è la matrice di proiezione ortogonale su P . Se P è generato da vettori ortonormali $\{v_1, \dots, v_k\}$, allora:

$$P = \sum_i v_i v_i^T$$

Il segmento risultante dopo l'assimilazione è:

$$s_1' = \text{proj}_P(s_2) + (I - P)s_1$$

dove $(I - P)s_1$ è la componente di s_1 ortogonale a P , che rimane inalterata.

Questa formulazione cattura il fatto che l'assimilazione agisce selettivamente su certi tratti mentre preserva altri. La geometria della proiezione garantisce che il segmento risultante sia il più vicino possibile al target s_2 compatibilmente con la preservazione dei tratti non assimilabili.

Neutralizzazione come Collasso Dimensionale

I processi di neutralizzazione, dove una distinzione fonologica viene eliminata in certi contesti, possono essere modellizzati come collassi dimensionali nello spazio dei tratti. Una neutralizzazione riduce la dimensionalità dello spazio accessibile proiettando su un sottospazio di dimensione inferiore.

Formalmente, se lo spazio originale è R^n e la neutralizzazione elimina k distinzioni, il processo può essere rappresentato come una proiezione su un sottospazio $(n-k)$ -dimensionale $W \subset R^n$. La mappatura di neutralizzazione è:

$$\varphi: R^n \rightarrow W \quad \varphi(s) = \text{proj}_W(s)$$

Tutti i segmenti che differiscono solo nelle dimensioni eliminate vengono mappati allo stesso punto in W , catturando formalmente la perdita di contrasto.

Dal punto di vista della teoria delle categorie, una neutralizzazione è un epimorfismo (una mappa surgettiva) nella categoria degli spazi di tratti, con un kernel non banale che rappresenta le distinzioni perse.

Metatesi come Permutazione

La metatesi, il riordinamento di segmenti, può essere rappresentata come una permutazione di posizioni in una sequenza. Formalmente, una permutazione è una biiezione $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

Data una sequenza di segmenti $(s_1, s_2, \dots, s_n)$, la metatesi produce la sequenza $(s_{\pi(1)}, s_{\pi(2)}, \dots, s_{\pi(n)})$. Le permutazioni formano un gruppo (il gruppo simmetrico S_n) rispetto alla composizione.

La struttura di gruppo cattura il fatto che metatesi successive possono essere composte, e che ogni metatesi ha un'inversa che la annulla. Metatesi che operano su segmenti adiacenti corrispondono a trasposizioni elementari (permutazioni che scambiano solo due elementi adiacenti).

Un risultato importante della teoria dei gruppi è che ogni permutazione può essere espressa come un prodotto di trasposizioni elementari. Questo suggerisce che metatesi complesse potrebbero essere decomposte in sequenze di scambi adiacenti più semplici.

Inserzione ed Elisione come Immersioni ed Retrazioni

I processi di inserzione (epenthesis) e elisione possono essere modellizzati geometricamente come immersioni e retrazioni tra spazi di dimensione diversa.

Un'inserzione mappa una sequenza di n segmenti in una sequenza di $n+1$ segmenti. Geometricamente, questo può essere visto come un'immersione da R^n in R^{n+1} :

$$i: R^n \rightarrow R^{n+1} \quad i(s_1, \dots, s_n) = (s_1, \dots, s_k, s_{\text{new}}, s_{k+1}, \dots, s_n)$$

dove s_{new} è il segmento epententico inserito in posizione $k+1$.

Un'elisione è l'operazione duale, una retrazione da R^{n+1} a R^n :

$$p: R^{n+1} \rightarrow R^n \quad p(s_1, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots, s_{n+1}) = (s_1, \dots, s_k, s_{k+2}, \dots, s_{n+1})$$

dove il segmento s_{k+1} è eliminato.

La composizione di inserzione ed elisione nella stessa posizione è l'identità ($p \circ i = \text{id}$), riflettendo il fatto che sono processi inversi. Questa struttura algebrica suggerisce che inserzione ed elisione potrebbero essere governate da principi duali.

Lenizione e Fortificazione come Flussi Gradiente

I processi di lenizione (indebolimento) e fortificazione (rafforzamento) segmentale possono essere modellizzati come flussi lungo campi gradiente in uno spazio di forza articolatoria.

Definiamo una funzione potenziale $U(s)$ che assegna a ogni configurazione segmentale s un valore di "energia" o "sforzo articolatorio". I segmenti forti (come le occlusive) hanno alta energia, mentre i segmenti deboli (come le approssimanti) hanno bassa energia.

La lenizione può essere modellizzata come un flusso che minimizza U , governato dall'equazione:

$$ds/dt = -\nabla U(s)$$

Questo è un flusso gradiente che si muove nella direzione di massima diminuzione dell'energia. I punti di equilibrio stabile (minimi locali di U) corrispondono a configurazioni segmentali stabili.

Dualmente, la fortificazione corrisponde a un flusso che aumenta U :

$$ds/dt = +\nabla U(s)$$

In realtà, i processi fonologici non aumentano tipicamente l'energia senza motivo, quindi la fortificazione è meglio modellizzata come un flusso verso minimi locali di una diversa

funzione potenziale U' che favorisce segmenti forti in certi contesti (ad esempio, all'inizio di parola o dopo pause).

Armonia come Sincronizzazione di Fase

I processi di armonia, dove segmenti multipli convergono verso valori comuni per certi tratti, possono essere modellizzati come sincronizzazione di oscillatori accoppiati.

Rappresentiamo ciascun segmento come un oscillatore con una fase $\theta_i(t)$ che rappresenta il valore di un tratto armonico (ad esempio, ATR). L'accoppiamento tra segmenti adiacenti è modellizzato mediante il sistema:

$$d\theta_i/dt = \omega_i + \sum_j K_{ij} \cdot \sin(\theta_j - \theta_i)$$

dove ω_i è la frequenza naturale del segmento i (che potrebbe riflettere bias lessicali o posizionali), e K_{ij} è la forza di accoppiamento tra i segmenti i e j .

Per accoppiamento sufficientemente forte, tutti gli oscillatori si sincronizzano: $\theta_i(t) \rightarrow \theta_{\text{common}}$ per tutti i . Questa sincronizzazione corrisponde all'armonia: tutti i segmenti convergono verso lo stesso valore del tratto armonico.

La transizione da uno stato desincronizzato (senza armonia) a uno stato sincronizzato (con armonia) può avvenire quando la forza di accoppiamento K supera una soglia critica. Questo fornisce un modello per comprendere l'emergenza di pattern di armonia in funzione della forza delle dipendenze fonologiche.

Trasformazioni Affini e Scaling Prosodico

Le relazioni di scaling prosodico, dove la durata di costituenti prosodici si adatta proporzionalmente alla struttura gerarchica, possono essere modellizzate mediante trasformazioni affini.

Una trasformazione affine in $\mathbb{R}^n$ ha la forma:

$$T(x) = Ax + b$$

dove A è una matrice $n \times n$ e b è un vettore di traslazione. Nel contesto prosodico, x potrebbe rappresentare durate di segmenti, A una matrice di scaling, e b un offset temporale.

Ad esempio, il fenomeno del final lengthening (allungamento finale), dove i segmenti alla fine di costituenti prosodici sono allungati, può essere modellizzato come:

$$T(d_1, d_2, \dots, d_n) = (d_1, d_2, \dots, \alpha \cdot d_n)$$

dove $\alpha > 1$ è il fattore di allungamento finale. Questa è una trasformazione affine con $A = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, \alpha)$ e $b = 0$.

Trasformazioni affini più complesse possono catturare fenomeni come il polysyllabic shortening (accorciamento polisillabico), dove l'aumento del numero di sillabe causa un

accorciamento proporzionale di ciascuna sillaba, mantenendo approssimativamente costante la durata totale del costituente.

Sintesi e Prospettive Future

La fonologia matematica rappresenta una sintesi affascinante tra la ricchezza empirica dei sistemi sonori delle lingue naturali e il rigore formale della matematica. Come abbiamo visto in questo trattato, gli strumenti dell'algebra, della geometria, della teoria dei grafi, dell'ottimizzazione, e dei sistemi dinamici forniscono framework potenti per comprendere e modellizzare i fenomeni fonologici a tutti i livelli di organizzazione, dalle proprietà discrete dei tratti distintivi alle dinamiche continue della produzione articolatoria.

L'approccio algebrico rivela che i sistemi di tratti distintivi non sono collezioni arbitrarie di feature, ma strutture matematiche rigorose con proprietà di gruppo, reticolo, e spazio vettoriale. Queste strutture catturano generalizzazioni profonde sulla natura delle classi naturali e dei processi fonologici, mostrando come pattern apparentemente disparati emergano da principi algebrici unificati.

La prospettiva geometrica illumina le dipendenze gerarchiche tra tratti e le relazioni di dominanza nelle rappresentazioni fonologiche. Le geometrie dei tratti, con le loro topologie e metriche, forniscono un linguaggio per descrivere la prossimità fonologica e le traiettorie dei processi fonologici come percorsi in spazi geometrici.

La teoria dei grafi si rivela indispensabile per modellizzare le rappresentazioni autosegmentali multidimensionali, le reti lessicali, e le strutture prosodiche gerarchiche. I concetti di centralità, clustering, e community detection aprono nuove prospettive sull'organizzazione lessicale e sulla diffusione del cambiamento fonologico.

La Teoria dell'Ottimalità, formulata come problema di ottimizzazione vincolata, connette la fonologia alla vasta letteratura matematica sull'ottimizzazione, permettendo l'applicazione di tecniche sofisticate di analisi e apprendimento. La geometria degli spazi di vincoli e delle grammatiche rivela la struttura tipologica dei sistemi fonologici.

I modelli dinamici della produzione articolatoria dimostrano che le rappresentazioni fonologiche astratte si realizzano attraverso processi governati da equazioni differenziali, connettendo la fonologia alla fisica matematica dei sistemi dinamici. Le nozioni di attrattori, sincronizzazione, e controllo ottimale forniscono strumenti per comprendere sia la stabilità che la variabilità della produzione del linguaggio.

L'analisi armonica e le rappresentazioni spettrali rivelano strutture periodiche e gerarchiche nei pattern fonologici, connettendo la fonologia all'analisi del segnale e alla teoria dell'informazione.

Infine, la concezione dei processi fonologici come trasformazioni geometriche unifica fenomeni diversi sotto principi matematici comuni, mostrando come assimilazione, neutralizzazione, metatesi, e armonia possano essere compresi come diverse manifestazioni di operazioni geometriche fondamentali.

Guardando al futuro, la fonologia matematica continuerà a evolversi incorporando nuovi strumenti dalla matematica contemporanea. L'integrazione con l'apprendimento automatico e le reti neurali artificiali promette di fornire modelli più sofisticati dell'acquisizione e del processamento fonologico. L'applicazione della topologia algebrica, attraverso strumenti come l'omologia persistente, potrebbe rivelare invarianti topologici dei sistemi fonologici che rimangono stabili attraverso trasformazioni continue. La teoria delle categorie superiori e l'omotopia potrebbero fornire linguaggi per descrivere equivalenze profonde tra rappresentazioni fonologiche apparentemente diverse.

La fonologia matematica non è semplicemente un'applicazione di formalismi astratti a fenomeni linguistici, ma una vera e propria scoperta che il linguaggio stesso, nella sua dimensione sonora, è strutturato secondo principi profondamente matematici. Le simmetrie, le geometrie, e le dinamiche che emergono dall'analisi matematica non sono imposizioni esterne ma riflettono l'architettura intrinseca dei sistemi fonologici, suggerendo che la capacità umana per il linguaggio potrebbe essere radicata in computazioni e rappresentazioni che sono fondamentalmente matematiche nella loro natura.

Teoria dell'Informazione e Entropia Fonologica

La teoria dell'informazione, sviluppata da Claude Shannon negli anni Quaranta, fornisce strumenti quantitativi per misurare il contenuto informativo e la complessità dei sistemi fonologici. Questi strumenti rivelano principi di organizzazione ed efficienza che governano i sistemi sonori delle lingue naturali.

Entropia dei Sistemi Fonologici

L'entropia di Shannon misura l'incertezza media associata a una distribuzione di probabilità. Dato un inventario fonologico con n segmenti, ciascuno con probabilità di occorrenza p_i , l'entropia dell'inventario è:

$$H = -\sum_{i=1}^n p_i \cdot \log_2(p_i)$$

dove la base logaritmica 2 è convenzionale nella teoria dell'informazione e l'entropia è misurata in bit. L'entropia è massima quando tutti i segmenti sono equiprobabili ($p_i = 1/n$ per ogni i), dando $H_{\max} = \log_2(n)$. È minima ($H = 0$) quando un segmento ha probabilità 1 e tutti gli altri hanno probabilità 0.

L'entropia cattura la quantità media di informazione trasmessa dalla scelta di un segmento. Sistemi con alta entropia utilizzano i loro segmenti in modo più uniforme, massimizzando l'efficienza informativa. Sistemi con bassa entropia sono dominati da pochi segmenti frequenti, riducendo l'efficienza ma potenzialmente aumentando la robustezza al rumore.

Le distribuzioni empiriche di frequenza dei fonemi nelle lingue naturali tipicamente mostrano una legge di Zipf: se ordiniamo i fonemi per frequenza decrescente, la frequenza del k -esimo fonema è approssimativamente proporzionale a $1/k^\alpha$ dove $\alpha \approx 1$. Questa distribuzione ha un'entropia intermedia tra il massimo e il minimo, suggerendo un compromesso tra efficienza ed evolvibilità.

Entropia Condizionale e Dipendenze Sequenziali

L'entropia condizionale misura l'incertezza residua su un simbolo dato il contesto precedente. Se X e Y sono variabili aleatorie che rappresentano segmenti consecutivi, l'entropia condizionale di Y dato X è:

$$H(Y|X) = -\sum_x \sum_y p(x,y) \cdot \log_2(p(y|x))$$

dove $p(x,y)$ è la probabilità congiunta e $p(y|x) = p(x,y)/p(x)$ è la probabilità condizionale.

L'entropia condizionale è sempre minore o uguale all'entropia non condizionale: $H(Y|X) \leq H(Y)$, con uguaglianza se e solo se X e Y sono indipendenti. La differenza:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

è l'informazione mutua tra X e Y , che misura quanta informazione su Y è contenuta in X .

Nel contesto fonologico, l'informazione mutua tra segmenti consecutivi quantifica le dipendenze sequenziali dovute a vincoli fonotattici, processi di assimilazione, e preferenze combinatorie. Valori elevati di $I(X;Y)$ indicano forti dipendenze: la conoscenza di un segmento riduce significativamente l'incertezza sul segmento successivo.

Possiamo estendere questa analisi a contesti più lunghi definendo l'entropia condizionale di ordine k :

$$H_k = H(X_n | X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_{n-k})$$

che misura l'incertezza residua su un segmento dati i k segmenti precedenti. La sequenza $H_1, H_2, H_3, \dots$ è monotonicamente decrescente e converge a un valore asintotico H_∞ chiamato entropia del tasso (rate entropy), che rappresenta la complessità intrinseca del sistema fonologico.

Complessità di Kolmogorov e Descrivibilità Fonologica

La complessità di Kolmogorov di una stringa s è definita come la lunghezza del programma più breve che produce s su una macchina di Turing universale:

$$K(s) = \min\{|p| : U(p) = s\}$$

dove U è una macchina di Turing universale, p è un programma, e $|p|$ è la lunghezza del programma.

Benché $K(s)$ non sia computabile in generale (teorema di incompletezza), fornisce una misura teorica della complessità intrinseca di pattern fonologici. Una forma fonologica che può essere generata da una regola semplice ha bassa complessità di Kolmogorov, mentre una forma irregolare con molte eccezioni ha alta complessità.

Questa nozione può essere approssimata praticamente mediante algoritmi di compressione. La lunghezza della rappresentazione compressa di un inventario fonologico o di un corpus di

parole fornisce una stima empirica della complessità. Lingue con pattern fonologici altamente regolari ammettono rappresentazioni più compresse.

La complessità di Kolmogorov condizionale $K(y|x)$ misura la complessità di y dato x come input. Nel contesto morfologico, $K(\text{superficie}|\text{sottostante})$ misura la complessità del processo fonologico che mappa forme sottostanti a forme superficiali. Processi regolari e produttivi hanno bassa complessità condizionale, mentre processi irregolari e lessicalizzati hanno alta complessità.

Lunghezza di Descrizione Minima e Induzione Grammaticale

Il principio della lunghezza di descrizione minima (MDL: Minimum Description Length) afferma che la migliore teoria per spiegare dati empirici è quella che minimizza la somma della lunghezza della teoria codificata e della lunghezza dei dati codificati usando quella teoria.

Formalmente, data una classe di grammatiche G e un corpus di dati D , la grammatica ottimale secondo MDL è:

$$g^* = \operatorname{argmin}_{\{g \in G\}} [L(g) + L(D|g)]$$

dove $L(g)$ è la lunghezza della codifica della grammatica g e $L(D|g)$ è la lunghezza della codifica dei dati dato che sono generati secondo g .

Questo principio formalizza il rasoio di Occam: grammatiche più semplici (con $L(g)$ piccolo) sono preferite, ma devono anche spiegare bene i dati ($L(D|g)$ piccolo). Il trade-off tra semplicità della grammatica e adattamento ai dati emerge naturalmente dalla minimizzazione della somma.

Nel contesto fonologico, $L(g)$ potrebbe misurare la complessità di un insieme di regole fonologiche o di una gerarchia di vincoli in OT, mentre $L(D|g)$ misura quanto efficacemente quella grammatica comprime i dati fonologici osservati. L'apprendimento fonologico può essere formulato come ricerca della grammatica che minimizza $L(g) + L(D|g)$.

Codifica Efficiente e Distribuzione di Zipf

La legge di Zipf, osservata empiricamente nelle distribuzioni di frequenza dei fonemi e delle parole, può essere derivata teoricamente da principi di codifica efficiente. Consideriamo il problema di assegnare codifiche binarie a un insieme di simboli in modo da minimizzare la lunghezza media del messaggio.

Se un simbolo s_i ha probabilità p_i , e gli assegniamo un codice di lunghezza l_i bit, la lunghezza media è:

$$\bar{L} = \sum_i p_i \cdot l_i$$

Secondo il teorema di codifica di Shannon, la lunghezza ottimale del codice per s_i è approssimativamente $-\log_2(p_i)$, e la lunghezza media ottimale è approssimativamente uguale all'entropia H .

Ora, se assumiamo che esista un costo cognitivo associato alla codifica di fonemi rari (che richiedono codifiche più lunghe) e un costo comunicativo associato all'uso frequente di pochi fonemi (che riduce la distintività), l'equilibrio ottimale produce una distribuzione simile a Zipf.

Formalmente, minimizziamo:

$$E = \alpha \cdot \sum_i p_i \cdot \log_2(1/p_i) + \beta \cdot \sum_i (-\log_2(p_i))^2$$

dove il primo termine rappresenta il costo comunicativo (proporzionale all'entropia) e il secondo termine penalizza varianze eccessive nelle lunghezze dei codici. La distribuzione ottimale che minimizza E è approssimativamente una distribuzione di Zipf.

Canale Rumoroso e Robustezza Fonologica

La teoria del canale rumoroso di Shannon modella la trasmissione di informazione attraverso un canale che introduce errori. Un canale è caratterizzato da una matrice di transizione P dove $P_{\{ij\}}$ è la probabilità che il simbolo i trasmesso sia ricevuto come simbolo j .

La capacità del canale C è definita come il massimo dell'informazione mutua tra input e output, massimizzato sulla distribuzione di input:

$$C = \max_{\{p(x)\}} I(X;Y)$$

dove X è la variabile aleatoria di input, Y è la variabile aleatoria di output, e $I(X;Y)$ è l'informazione mutua.

Nel contesto fonologico, il "canale" rappresenta il processo di produzione e percezione del linguaggio, soggetto a rumore articolatorio e percettivo. La capacità del canale limita la quantità di informazione fonologica che può essere trasmessa affidabilmente.

I sistemi fonologici tendono a massimizzare la distintività percettiva compatibilmente con vincoli articolatori, corrispondendo a una distribuzione di probabilità che si avvicina alla capacità del canale. Questo principio, noto come dispersion theory, predice che i fonemi in un inventario fonologico siano distribuiti nello spazio percettivo in modo da massimizzare le distanze mutue.

Ridondanza e Codici a Correzione di Errore

I sistemi fonologici esibiscono ridondanza intrinseca che permette la ricostruzione di informazione anche in presenza di errori. La ridondanza R di un sistema è:

$$R = 1 - H/H_{\max}$$

dove H è l'entropia effettiva e $H_{\max}$ è l'entropia massima possibile ($\log_2(n)$ per n simboli equiprobabili).

Valori positivi di R indicano che il sistema non sta utilizzando tutta la sua capacità informativa massima. Questa ridondanza apparente è in realtà funzionale: permette la rilevazione e correzione di errori.

La teoria dei codici a correzione di errore fornisce strumenti per quantificare questa capacità. Un codice è un sottoinsieme $C \subseteq \Sigma^n$ dello spazio di tutte le stringhe possibili di lunghezza n . La distanza minima $d_{\min}$ del codice è:

$$d_{\min} = \min_{\{c_1, c_2 \in C, c_1 \neq c_2\}} d_H(c_1, c_2)$$

dove d_H è la distanza di Hamming. Un codice con distanza minima d può correggere fino a $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ errori per parola.

I pattern fonotattici delle lingue naturali definiscono implicitamente codici: l'insieme delle parole fonologicamente ben formate costituisce un codice C . La distanza minima di questo codice determina quanto siano robusti al rumore i contrasti lessicali.

Lingue con vincoli fonotattici più restrittivi hanno codici con distanza minima maggiore, aumentando la robustezza ma riducendo il numero di parole possibili (la cardinalità di C). Questo rappresenta un trade-off fondamentale tra espressività lessicale e robustezza comunicativa.

Topologia Algebrica e Omologia dei Sistemi Fonologici

La topologia algebrica fornisce strumenti per studiare proprietà globali di spazi e strutture che sono invarianti sotto trasformazioni continue. Applicata alla fonologia, rivela caratteristiche strutturali profonde che persistono attraverso variazioni superficiali.

Complessi Simpliciali e Rappresentazioni Fonologiche

Un complesso simpliciale è una collezione di simpletti (generalizzazioni di triangoli e tetraedri a dimensioni arbitrarie) che soddisfano certe condizioni di compatibilità. Formalmente, un complesso simpliciale K è una collezione di sottoinsiemi di un insieme di vertici V tale che:

1. Se $v \in V$, allora $\{v\} \in K$ (ogni vertice è un simpletto)
2. Se $\sigma \in K$ e $\tau \subseteq \sigma$, allora $\tau \in K$ (ogni faccia di un simpletto è un simpletto)

Nel contesto fonologico, i vertici possono rappresentare segmenti, tratti, o parole, e i simpletti di dimensione superiore rappresentano relazioni o co-occorrenze tra questi elementi.

Ad esempio, possiamo costruire un complesso simpliciale del lessico dove i vertici sono parole, e un insieme di k parole forma un $(k-1)$ -simpletto se condividono tutti lo stesso pattern fonologico (ad esempio, la stessa struttura sillabica). Questo complesso cattura la struttura combinatoria del lessico.

Un altro esempio: i vertici rappresentano tratti distintivi, e un insieme di k tratti forma un $(k-1)$ -simpletto se co-occorrono legalmente in almeno un segmento della lingua. Questo complesso di co-occorrenza dei tratti codifica i vincoli di buona formazione segmentale.

Gruppi di Omologia e Invarianti Topologici

I gruppi di omologia sono invarianti algebrici associati a un complesso simpliciale che catturano informazioni sulla sua struttura di "buchi" a diverse dimensioni. Il k-esimo gruppo di omologia $H_k(K)$ classifica i buchi k-dimensionali in K .

Formalmente, definiamo le catene k-dimensionali C_k come il gruppo abeliano libero generato dai k-simplex. L'operatore bordo $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$ mappa ogni k-simplex alla somma (formale) delle sue (k-1)-facce.

Una proprietà fondamentale è che $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$, ovvero il bordo di un bordo è vuoto. Questo permette di definire:

- $Z_k = \ker(\partial_k)$ (k-cicli: catene senza bordo)
- $B_k = \text{im}(\partial_{k+1})$ (k-bordi: catene che sono bordi di qualcosa)

Il k-esimo gruppo di omologia è il quoziente:

$$H_k(K) = Z_k / B_k$$

Gli elementi non banali di H_k rappresentano k-cicli che non sono bordi, ovvero "buchi" k-dimensionali genuini.

Nel contesto fonologico:

- H_0 conta le componenti connesse (cluster lessicali isolati)
- H_1 conta i cicli unidimensionali (loop nelle reti fonologiche)
- H_2 conta le cavità bidimensionali (vuoti nello spazio fonologico)

Il numero di Betti $\beta_k = \text{rank}(H_k)$ quantifica il numero di buchi indipendenti a dimensione k. La caratteristica di Eulera del complesso è:

$$\chi(K) = \sum_k (-1)^k \beta_k$$

che è un invariante topologico globale.

Omologia Persistente e Filtrazione di Complessi

L'omologia persistente estende l'omologia classica per analizzare come la topologia di un complesso cambia attraverso una filtrazione, ovvero una sequenza di complessi annidati:

$$K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_m$$

Nel contesto fonologico, possiamo costruire filtrazioni basate su soglie di similarità. Ad esempio, definiamo K_ϵ come il complesso dove due parole sono connesse se la loro distanza fonologica è $\leq \epsilon$. All'aumentare di ϵ , il complesso cresce connettendo elementi sempre più distanti.

L'omologia persistente traccia quando appaiono e scompaiono buchi topologici lungo la filtrazione. Un buco che "nasce" a $\epsilon = a$ e "muore" a $\epsilon = b$ ha persistenza $(b - a)$. Buchi con alta persistenza sono features topologiche robuste, mentre buchi con bassa persistenza sono probabilmente rumore.

Il diagramma di persistenza (persistence diagram) visualizza queste nascite e morti come punti nel piano (nascita, morte). Punti lontani dalla diagonale (nascita = morte) corrispondono a features persistenti e quindi significative.

La distanza di bottleneck tra diagrammi di persistenza fornisce una metrica per confrontare la struttura topologica di sistemi fonologici diversi:

$$d_B(D_1, D_2) = \inf_{\gamma} \sup_p \|p - \gamma(p)\|_{\infty}$$

dove l'infimo è su tutte le biiezioni γ tra i punti dei due diagrammi.

Mapper e Visualizzazione Topologica

L'algoritmo Mapper, sviluppato da Gurjeet Singh e collaboratori, costruisce una rappresentazione topologica semplificata di dataset ad alta dimensione. Dato un dataset X e una funzione filtro $f: X \rightarrow \mathbb{R}^k$, Mapper procede come segue:

1. Copre l'immagine $f(X)$ con insiemi aperti sovrapposti $U_1, U_2, \dots, U_m$
2. Per ogni i , considera la preimmagine $X_i = f^{-1}(U_i) \cap X$
3. Decompone ogni X_i nelle sue componenti connesse mediante clustering
4. Costruisce un grafo dove i nodi sono le componenti connesse e due nodi sono connessi se le componenti condivise hanno intersezione non vuota

Il grafo risultante cattura la struttura topologica essenziale di X , riducendo la dimensionalità ma preservando features globali.

Applicato a dataset fonologici (ad esempio, uno spazio di vocali o consonanti con molti parametri acustici e articolatori), Mapper può rivelare:

- Cluster naturali di suoni con proprietà simili
- Percorsi di transizione tra categorie fonologiche
- Regioni di transizione o ambiguità categoriale

La scelta della funzione filtro f è cruciale. Opzioni naturali includono:

- Proiezione sulle prime componenti principali (PCA)
- Densità locale dei punti (density estimator)
- Distanza da un punto di riferimento (landmark)

Teoria di Morse e Paesaggi Fonologici

La teoria di Morse studia la topologia di varietà differenziabili analizzando i punti critici di funzioni lisce. Dato uno spazio fonologico M (modellizzato come una varietà differenziabile) e una funzione "energia" o "costo" $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, i punti critici di f (dove $\nabla f = 0$) corrispondono a configurazioni di equilibrio.

Ciascun punto critico ha un indice (indice di Morse) che conta il numero di direzioni di curvatura negativa. Per una funzione di energia fonologica:

- Minimi locali (indice 0) rappresentano configurazioni stabili

- Punti di sella (indice intermedio) rappresentano configurazioni di transizione
- Massimi locali (indice massimo) rappresentano configurazioni instabili

Il teorema di Morse afferma che la topologia di M può essere ricostruita dai punti critici di f . Specificatamente, la caratteristica di Eulera può essere calcolata come:

$$\chi(M) = \sum_i (-1)^{\text{ind}(c_i)}$$

dove la somma è su tutti i punti critici c_i e $\text{ind}(c_i)$ è l'indice di Morse.

Nel contesto fonologico, questo suggerisce che la struttura globale di uno spazio fonologico (numero di categorie, connessioni tra categorie) può essere dedotta analizzando i punti di equilibrio di funzioni di costo articolatorio o percettivo.

La teoria di Morse-Novikov estende questi risultati a cicli chiusi in varietà, permettendo l'analisi di processi fonologici ciclici o ricorsivi.

Teoria dei Nodi e Intrecci Fonologici

Sebbene possa sembrare esotica, la teoria dei nodi trova applicazioni nella fonologia autosegmentale quando rappresentazioni su tier multipli creano pattern di intreccio topologicamente non banali.

Un nodo è un'immersione di un cerchio S^1 in R^3 (o S^3). Due nodi sono equivalenti se uno può essere deformato continuamente nell'altro senza attraversare se stesso. La teoria dei nodi classifica i nodi usando invarianti algebrici.

Nel contesto autosegmentale, se permettiamo linee di associazione che si "incrociano" nello spazio tridimensionale (estendendo la rappresentazione planare bidimensionale standard), possiamo ottenere strutture con topologia di nodo non banale.

Il polinomio di Jones $J(K)(t)$ è un invariante di nodi che può essere calcolato mediante relazioni di ricorrenza basate sui crossing. Per rappresentazioni autosegmentali intese come diagrammi di nodi, $J(K)$ potrebbe quantificare la complessità topologica intrinseca della rappresentazione.

Benché altamente astratto, questo approccio potrebbe rivelare vincoli topologici profondi sulle rappresentazioni fonologiche ammissibili, oltre i vincoli combinatorici standard.

Logica Matematica e Fondamenti Formali

La logica matematica fornisce i fondamenti formali per esprimere vincoli, generalizzazioni, e teorie fonologiche in linguaggi precisi e non ambigui. Questo permette l'analisi rigorosa della potenza espressiva delle teorie fonologiche e delle loro proprietà computazionali.

Logica del Primo Ordine e Vincoli Fonologici

La logica del primo ordine (FOL) fornisce un linguaggio per esprimere affermazioni su strutture. Una formula FOL è costruita a partire da:

- Variabili ($x, y, z, \dots$)
- Predicati ($P(x), R(x,y), \dots$)
- Connettivi logici ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$)
- Quantificatori ($\forall, \exists$)

Nel contesto fonologico, possiamo interpretare le variabili come riferimenti a posizioni o segmenti in una rappresentazione fonologica, e i predicati come proprietà fonologiche.

Ad esempio, un vincolo che vieta sequenze di tre consonanti consecutive può essere espresso come:

$$\neg \exists x \exists y \exists z [\text{Cons}(x) \wedge \text{Cons}(y) \wedge \text{Cons}(z) \wedge \text{Adiacente}(x,y) \wedge \text{Adiacente}(y,z)]$$

Un vincolo di armonia vocalica che richiede che tutte le vocali in una parola abbiano lo stesso valore per il tratto ATR può essere espresso come:

$$\forall x \forall y [\text{Vocale}(x) \wedge \text{Vocale}(y) \rightarrow (\text{ATR}(x) \leftrightarrow \text{ATR}(y))]$$

La logica del primo ordine ha proprietà computazionali ben studiate. Il problema di soddisfacibilità (SAT) per FOL è semidecidibile: se una formula è soddisfacibile, un algoritmo può eventualmente trovare un modello, ma se è insoddisfacibile, l'algoritmo potrebbe non terminare.

Tuttavia, frammenti ristretti di FOL hanno migliori proprietà computazionali. La logica monadica del secondo ordine su stringhe (MSO) permette quantificazione su insiemi di posizioni ed è decidibile. Molti vincoli fonologici naturali possono essere espressi in MSO.

Automi e Definibilità in Logica

Un risultato profondo, dovuto a Büchi e altri, stabilisce un'equivalenza tra espressività logica e riconoscibilità automata. Una classe di linguaggi (insiemi di stringhe) è definibile in logica monadica del secondo ordine se e solo se è riconoscibile da automi a stati finiti.

Formalmente, dato un alfabeto Σ , un linguaggio $L \subseteq \Sigma^*$ è:

- MSO-definibile $\leftrightarrow$ riconoscibile da FSA

Questo teorema ha profonde implicazioni per la fonologia. Se i vincoli fonologici sono esprimibili in MSO, allora le grammatiche fonologiche corrispondono a FSA o FST, garantendo decidibilità e trattabilità computazionale.

James Rogers ha dimostrato che molti vincoli fonologici standard (inclusi vincoli di adiacenza, precedenza, e alcuni vincoli prosodici) sono infatti MSO-definibili. Questo fornisce una caratterizzazione formale della "località" fonologica.

Tuttavia, ci sono vincoli fonologici che sembrano richiedere potenza espressiva oltre MSO. Ad esempio, vincoli che contano occorrenze (richiedi esattamente 3 sillabe) o che impongono equilibri globali possono richiedere logiche più potenti o meccanismi computazionali più ricchi.

Teoria dei Modelli e Strutture Fonologiche

La teoria dei modelli studia le relazioni tra sintassi (formule logiche) e semantica (strutture che soddisfano quelle formule). Una struttura M è una tupla (D, I) dove D è un dominio (insieme di oggetti) e I è un'interpretazione che assegna significato ai predicati e alle funzioni.

Nel contesto fonologico, una struttura potrebbe essere:

- D = insieme delle posizioni in una rappresentazione
- $I(\text{Cons}) = \{x \in D : x \text{ è una consonante}\}$
- $I(\text{Adiacente}) = \{(x,y) \in D^2 : x \text{ e } y \text{ sono adiacenti}\}$
- ecc.

Una formula φ è vera in una struttura M (denotato $M \models \varphi$) se l'interpretazione soddisfa le condizioni specificate dalla formula.

Un insieme di formule Γ (una teoria) definisce una classe di strutture:

$$\text{Mod}(\Gamma) = \{M : M \models \varphi \text{ per ogni } \varphi \in \Gamma\}$$

La classe delle strutture fonologiche ammissibili in una lingua può essere caratterizzata come $\text{Mod}(\Gamma)$ per qualche teoria Γ che codifica i vincoli fonologici di quella lingua.

Il teorema di compattezza afferma che se ogni sottoinsieme finito di Γ è soddisfacibile, allora l'intera Γ è soddisfacibile. Questo ha implicazioni per grammatiche con infiniti vincoli: se tutti i sottoinsiemi finiti di vincoli sono compatibili, allora l'intera grammatica è coerente.

Lambda Calcolo e Composizionalità Fonologica

Il lambda calcolo fornisce un framework formale per esprimere funzioni e composizione funzionale. Un termine lambda è definito ricorsivamente:

- Variabili: x, y, z sono termini
- Astrazione: se M è un termine, allora $\lambda x.M$ è un termine (funzione)
- Applicazione: se M e N sono termini, allora $(M N)$ è un termine

Nel contesto fonologico, possiamo usare il lambda calcolo per esprimere processi fonologici come funzioni composizionali. Ad esempio, una regola di assimilazione potrebbe essere espressa come:

$$\lambda x. \lambda y. \text{ se } \text{Adiacente}(x,y) \text{ allora } \text{Assimila}(x,y) \text{ altrimenti } (x,y)$$

La composizione di regole corrisponde alla composizione funzionale nel lambda calcolo. Se f e g sono due processi fonologici, la loro composizione sequenziale è:

$$\lambda x. (g (f x))$$

Il lambda calcolo tipato estende il lambda calcolo con un sistema di tipi che previene certe applicazioni mal formate. Nel contesto fonologico, i tipi potrebbero corrispondere a categorie

fonologiche (segmenti, sillabe, parole), e la tipizzazione garantisce che processi fonologici si applichino solo a oggetti del tipo appropriato.

La corrispondenza di Curry-Howard stabilisce una profonda connessione tra lambda calcolo tipato e logica proposizionale: i termini corrispondono a prove e i tipi a proposizioni. Questa corrispondenza può essere estesa alla fonologia, dove processi fonologici corrispondono a prove di derivazioni fonologiche.

Categorie Fonologiche e Morfismi

La teoria delle categorie fornisce un linguaggio unificante per descrivere strutture matematiche e le relazioni tra esse. Una categoria C consiste di una collezione di oggetti $Ob(C)$ e, per ogni coppia di oggetti A, B , un insieme di morfismi $Hom(A, B)$ che soddisfano:

1. Identità: per ogni oggetto A esiste un morfismo identità $id_A: A \rightarrow A$
2. Composizione: dati morfismi $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$, esiste un morfismo composto $g \circ f: A \rightarrow C$
3. Associatività: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
4. Unità: $f \circ id_A = f = id_B \circ f$ per ogni $f: A \rightarrow B$

Nel contesto fonologico, possiamo definire diverse categorie naturali:

Categoria dei Segmenti (Seg): Gli oggetti sono segmenti fonologici, e i morfismi sono processi fonologici che trasformano un segmento in un altro. La composizione di morfismi corrisponde all'applicazione sequenziale di processi.

Categoria delle Rappresentazioni (Rep): Gli oggetti sono rappresentazioni fonologiche complete (strutture autosegmentali con tier multipli), e i morfismi sono trasformazioni che preservano certe proprietà strutturali.

Categoria delle Grammatiche (Gram): Gli oggetti sono grammatiche fonologiche (insiemi di regole o gerarchie di vincoli), e i morfismi sono relazioni di raffinamento o specializzazione tra grammatiche.

Un concetto fondamentale è quello di funtore, una mappatura tra categorie che preserva la struttura categoriale. Un funtore $F: C \rightarrow D$ assegna a ogni oggetto $A \in Ob(C)$ un oggetto $F(A) \in Ob(D)$, e a ogni morfismo $f: A \rightarrow B$ in C un morfismo $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$ in D , preservando identità e composizione:

$$F(id_A) = id_{F(A)} \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

Nel contesto fonologico, un funtore potrebbe rappresentare:

- La mappatura da rappresentazioni sottostanti a rappresentazioni superficiali (un funtore GEN in Optimality Theory)
- La mappatura da spazi articolatori a spazi acustici
- La relazione tra fonologia e morfologia

Trasformazioni Naturali e Equivalenze

Una trasformazione naturale η tra due funtori $F, G: C \rightarrow D$ è una famiglia di morfismi $\eta_A: F(A) \rightarrow G(A)$ indicizzata sugli oggetti di C , tale che per ogni morfismo $f: A \rightarrow B$ in C , il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc}
 F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & G(A) \\
 | & & | \\
 F(f) & & G(f) \\
 | & & | \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 F(B) & \xrightarrow{\eta_B} & G(B)
 \end{array}$$

Ovvero: $G(f) \circ \eta_A = \eta_B \circ F(f)$.

Le trasformazioni naturali catturano l'idea di "mappature compatibili" tra strutture. Nel contesto fonologico, una trasformazione naturale potrebbe rappresentare una corrispondenza sistematica tra due teorie fonologiche diverse che descrivono gli stessi fenomeni.

Se esiste una trasformazione naturale $\eta: F \rightarrow G$ dove ogni η_A è un isomorfismo, allora F e G sono naturalmente isomorfi, denotato $F \cong G$. Questo cattura l'idea che due descrizioni fonologiche sono "essenzialmente la stessa cosa" anche se formalmente diverse.

Limiti, Colimiti e Costruzioni Universali

I limiti e colimiti sono costruzioni universali che catturano pattern ricorrenti in matematica. Il prodotto di due oggetti A e B è un limite: è un oggetto $A \times B$ con proiezioni $\pi_1: A \times B \rightarrow A$ e $\pi_2: A \times B \rightarrow B$ che soddisfano una proprietà universale.

Nel contesto fonologico, il prodotto di due tier autosegmentali corrisponde alla loro rappresentazione congiunta. Se T_1 è il tier melodico e T_2 è il tier tonale, allora $T_1 \times T_2$ rappresenta la configurazione completa di melodia e tono.

Il coprodotto (somma categoriale) $A + B$ è il duale del prodotto. Nel contesto fonologico, potrebbe rappresentare l'unione disgiunta di due inventari fonologici o la combinazione di due grammatiche indipendenti.

Il pullback è un limite più complesso che cattura configurazioni di compatibilità. Dato un diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 & B & \\
 & | & \\
 & f & \\
 & \downarrow & \\
 A & \xrightarrow{g} & C
 \end{array}$$

il pullback è un oggetto P con morfismi $p_1: P \rightarrow A$ e $p_2: P \rightarrow B$ tali che $g \circ p_1 = f \circ p_2$, e P è universale con questa proprietà.

Nel contesto fonologico, il pullback potrebbe rappresentare l'insieme di configurazioni che sono simultaneamente compatibili con due vincoli diversi.

Algebre e Coalgebre Categoriali

Un'algebra per un funtore $F: C \rightarrow C$ è una coppia (A, α) dove A è un oggetto e $\alpha: F(A) \rightarrow A$ è un morfismo (la struttura algebrica). Dualmente, una coalgebra è una coppia (A, α) con $\alpha: A \rightarrow F(A)$.

Nel contesto fonologico, consideriamo il funtore F che mappa un insieme di segmenti S all'insieme delle possibili sequenze di lunghezza finita su S . Un'algebra per questo funtore potrebbe rappresentare un processo di parsing che assegna struttura a sequenze.

Un concetto particolarmente rilevante è quello di algebra iniziale e coalgebra finale. L'algebra iniziale per un funtore F è un'algebra $(I, \alpha: F(I) \rightarrow I)$ tale che per ogni altra algebra (A, β) , esiste un unico omomorfismo $h: I \rightarrow A$.

Le algebre iniziali catturano l'idea di "costruzione libera" o "minima". Nel contesto fonologico, l'algebra iniziale potrebbe rappresentare il sistema fonologico più semplice compatibile con certi vincoli universali.

Le coalgebre finali sono duali e catturano nozioni di "comportamento osservabile". Una coalgebra finale potrebbe rappresentare lo spazio completo di tutti i possibili comportamenti fonologici.

Monoidi e Categorie Monoidal

Una categoria monoidal è una categoria C dotata di:

- Un funtore prodotto tensoriale $\otimes: C \times C \rightarrow C$
- Un oggetto unità I
- Isomorfismi naturali per associatività e unità

soddisfacenti gli assiomi di coerenza (diagrammi pentagonali e triangolari).

Nel contesto fonologico, il prodotto tensoriale potrebbe rappresentare la concatenazione di rappresentazioni fonologiche. Se A e B sono due sequenze di segmenti, $A \otimes B$ è la loro concatenazione. L'oggetto unità I è la sequenza vuota.

Con questa struttura monoidal, possiamo definire oggetti monoidi nella categoria fonologica: un monoide è un oggetto M con morfismi $\mu: M \otimes M \rightarrow M$ (moltiplicazione) e $\eta: I \rightarrow M$ (unità) soddisfacenti assiomi di associatività e unità.

Nel contesto linguistico, un monoide potrebbe rappresentare un lessico con operazione di composizione morfofonologica.

Teoria dei Topos e Logica Interna

Un topos è una categoria con struttura molto ricca che generalizza simultaneamente la categoria degli insiemi e la categoria dei fasci su uno spazio topologico. Ogni topos ha una logica interna che può essere diversa dalla logica classica.

Formalmente, un topos è una categoria con:

- Limiti finiti
- Esponenziali (oggetti funzione)
- Un classificatore di sottooggetti Ω

La logica interna di un topos permette di "ragionare internamente" usando costrutti logici, ma l'interpretazione può essere non standard.

Nel contesto fonologico, potremmo considerare un topos di fasci su uno spazio di parametri fonologici. Questo permette di trattare "variazione parametrica" in modo uniforme: diverse interpretazioni di un concetto fonologico in lingue diverse corrispondono a diverse sezioni di un fascio.

La logica interna potrebbe essere intuizionistica piuttosto che classica, riflettendo il fatto che certe proprietà fonologiche sono costruttive (possiamo verificarle algebricamente) piuttosto che classiche (potrebbero essere indecidibili).

Statistica e Probabilità nei Sistemi Fonologici

L'approccio probabilistico alla fonologia riconosce che i sistemi fonologici esibiscono variazione, gradienza, e incertezza intrinseca. I metodi statistici permettono di quantificare questa variabilità e di inferire pattern da dati empirici.

Modelli di Massima Entropia e Grammatiche Pesate

I modelli di massima entropia (MaxEnt) forniscono un framework probabilistico per la fonologia che generalizza la Teoria dell'Ottimalità. Invece di selezionare categoricamente il candidato ottimale, MaxEnt assegna probabilità a tutti i candidati basandosi su quanto violano i vincoli.

Dato un input i , un insieme di candidati $\text{GEN}(i)$, e un insieme di vincoli con pesi $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, la probabilità di un candidato c è:

$$P(c \mid i, w) = \exp(-\sum_j w_j \cdot v_j(c)) / Z(i, w)$$

dove $v_j(c)$ è il numero di violazioni del vincolo j da parte del candidato c , e $Z(i, w)$ è la costante di normalizzazione (funzione di partizione):

$$Z(i, w) = \sum_{c' \in \text{GEN}(i)} \exp(-\sum_j w_j \cdot v_j(c'))$$

Questa formula implementa il principio di massima entropia: tra tutte le distribuzioni di probabilità compatibili con certi vincoli (espressi come valori attesi delle violazioni), scegliamo quella con entropia massima.

I pesi w possono essere stimati da dati empirici mediante massima verosimiglianza. Data una collezione di coppie input-output osservate $D = \{(i_1, o_1), (i_2, o_2), \dots, (i_N, o_N)\}$, la log-verosimiglianza è:

$$\ell(w) = \sum_{\square} \log P(o_{\square} | i_{\square}, w) = \sum_{\square} [-\sum_{\square} w_{\square} \cdot v_{\square}(o_{\square}) - \log Z(i_{\square}, w)]$$

Massimizzare $\ell(w)$ rispetto a w fornisce i pesi ottimali. Il gradiente è:

$$\partial \ell / \partial w_i = -\sum_{\square} [v_i(o_{\square}) - E_{\square}\{P(\cdot | i_{\square}, w)\}[v_i]]$$

dove $E_{\square}\{P(\cdot | i_{\square}, w)\}[v_i]$ è il valore atteso delle violazioni del vincolo i sotto la distribuzione predetta dal modello.

Questo gradiente ha un'interpretazione intuitiva: aumenta i pesi dei vincoli che sono violati meno frequentemente nei dati osservati rispetto alle predizioni del modello.

L'algoritmo di discesa del gradiente o metodi più sofisticati come L-BFGS possono essere utilizzati per trovare i pesi ottimali. In pratica, si aggiunge spesso un termine di regolarizzazione per prevenire overfitting:

$$\ell_{\text{reg}}(w) = \ell(w) - \lambda \cdot \|w\|^2$$

dove λ controlla l'intensità della regolarizzazione.

Modelli Grafici Probabilistici e Reti Bayesiane

Le reti Bayesiane forniscono un framework per rappresentare dipendenze probabilistiche tra variabili. Una rete Bayesiana è un grafo orientato aciclico (DAG) $G = (V, E)$ dove ogni nodo $v \in V$ rappresenta una variabile aleatoria X_v , e gli archi rappresentano dipendenze condizionali.

La distribuzione congiunta si fattorizza secondo la struttura del grafo:

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_i P(X_i | \text{Pa}(X_i))$$

dove $\text{Pa}(X_i)$ sono i genitori di X_i nel grafo.

Nel contesto fonologico, potremmo costruire una rete Bayesiana dove:

- I nodi rappresentano tratti di segmenti consecutivi
- Gli archi rappresentano dipendenze fonotattiche e di assimilazione
- Le distribuzioni condizionali catturano processi fonologici probabilistici

Ad esempio, per modellizzare l'assimilazione di sonorità, potremmo avere:

$$P(\text{sonorità}(s_2) | \text{sonorità}(s_1), \text{distanza}(s_1, s_2))$$

dove la probabilità che s_2 sia sonoro dipende dalla sonorità di s_1 e dalla distanza tra i due segmenti.

L'inferenza in reti Bayesiane (calcolare probabilità marginali o condizionali) può essere effettuata mediante algoritmi come belief propagation o sampling MCMC. L'apprendimento della struttura della rete da dati può utilizzare metodi basati su score (come BIC o AIC) o test di indipendenza condizionale.

Catene di Markov e Processi Stocastici

Un processo stocastico a tempo discreto $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ è una sequenza di variabili aleatorie. Una catena di Markov è un processo dove lo stato futuro dipende solo dallo stato presente, non dalla storia passata:

$$P(X_{t+1} | X_t, X_{t-1}, \dots, X_0) = P(X_{t+1} | X_t)$$

Nel contesto fonologico, possiamo modellizzare sequenze di segmenti come catene di Markov, dove ogni segmento dipende solo dal segmento precedente (catena di Markov di primo ordine) o dagli n segmenti precedenti (catena di ordine n).

La dinamica è specificata da una matrice di transizione P dove $P_{ij} = P(X_{t+1} = j | X_t = i)$. Una proprietà fondamentale è che la distribuzione di probabilità al tempo t si ottiene mediante moltiplicazione matriciale:

$$\pi(t) = \pi(0) \cdot P^t$$

dove $\pi(t)$ è il vettore di probabilità al tempo t .

Una catena di Markov è ergodica se esiste una distribuzione stazionaria π tale che $\pi = \pi \cdot P$. Questa distribuzione stazionaria rappresenta la distribuzione di equilibrio a lungo termine e può essere interpretata come la distribuzione di frequenza dei segmenti in una lingua.

Le catene di Markov nascoste (HMM: Hidden Markov Models) estendono le catene di Markov permettendo che gli stati siano nascosti, con osservazioni che dipendono probabilisticamente dagli stati. Nel contesto fonologico:

- Stati nascosti potrebbero rappresentare categorie fonologiche astratte
- Osservazioni potrebbero rappresentare realizzazioni fonetiche concrete

L'algoritmo forward-backward permette di calcolare probabilità di sequenze osservate, mentre l'algoritmo di Viterbi trova la sequenza di stati nascosti più probabile. L'algoritmo di Baum-Welch (un'istanza di Expectation-Maximization) stima i parametri del modello da dati osservati.

Processi Puntuali e Timing Fonologico

I processi puntuali modellizzano eventi che occorrono in tempo continuo. Un processo puntuale è caratterizzato da una funzione di intensità $\lambda(t)$ che specifica il tasso istantaneo di occorrenza di eventi al tempo t .

Il processo di Poisson è il più semplice: eventi occorrono indipendentemente con tasso costante λ . La probabilità di osservare esattamente k eventi nell'intervallo $[0, T]$ è:

$$P(N(T) = k) = (\lambda T)^k \cdot e^{-\lambda T} / k!$$

Nel contesto fonologico, i processi puntuali possono modellizzare il timing di eventi articolatori o percettivi. Ad esempio, l'occorrenza di gesti di chiusura glottale potrebbe seguire un processo puntuale con intensità che dipende da fattori prosodici.

I processi puntuali auto-eccitanti (come il processo di Hawkes) modellizzano situazioni dove eventi passati aumentano la probabilità di eventi futuri. L'intensità ha la forma:

$$\lambda(t) = \mu + \sum_{t_i < t} \varphi(t - t_i)$$

dove μ è un tasso di base e $\varphi(\cdot)$ è una funzione kernel che descrive come eventi passati influenzano il tasso corrente.

Nel contesto di sequenze rapide di gesti articolatori, un processo di Hawkes potrebbe catturare facilitazione: l'esecuzione di un gesto rende più probabile l'esecuzione rapida di gesti successivi.

Modelli Gerarchici Bayesiani e Pooling

I modelli gerarchici Bayesiani permettono di modellizzare variazione a livelli multipli simultaneamente, ad esempio variazione tra parlanti, tra parole, e all'interno di ripetizioni.

Un modello gerarchico tipico ha la struttura:

Livello 1 (osservazioni): $y_{\{ijk\}} \sim P(\theta_{\{ij\}})$ Livello 2 (parlante): $\theta_{\{ij\}} \sim Q(\varphi_i)$ Livello 3 (popolazione): $\varphi_i \sim R(\psi)$ Livello 4 (iperparametri): $\psi \sim S$

dove $y_{\{ijk\}}$ è la k-esima osservazione della j-esima parola del i-esimo parlante.

Questo framework permette di "prendere in prestito forza statistica" tra livelli (statistical pooling): stime per parlanti con pochi dati sono informate dai pattern globali della popolazione.

Nel contesto fonologico, potremmo modellizzare la durata vocalica come:

$$\text{durata}_{\{ijk\}} \sim \text{Normal}(\mu_{\{ij\}}, \sigma^2) \quad \mu_{\{ij\}} \sim \text{Normal}(\alpha_i + \beta_i \cdot \text{contesto}_j, \tau^2) \quad \alpha_i \sim \text{Normal}(\alpha_0, \sigma_\alpha^2) \quad \beta_i \sim \text{Normal}(\beta_0, \sigma_\beta^2)$$

dove α_i è l'effetto di baseline per il parlante i, β_i è la sensibilità del parlante i al contesto, e α_0, β_0 sono medie della popolazione.

L'inferenza in modelli gerarchici può essere effettuata mediante MCMC (Markov Chain Monte Carlo), come l'algoritmo di Gibbs sampling o Hamiltonian Monte Carlo, o mediante metodi di approssimazione come variational inference.

Analisi Multivariata e Riduzione Dimensionale

I dati fonologici sono tipicamente ad alta dimensione (molti parametri acustici, articolatori, o tratti distintivi). Le tecniche di riduzione dimensionale permettono di visualizzare e analizzare questi dati in spazi di dimensione inferiore.

L'analisi delle componenti principali (PCA) trova direzioni di massima varianza nei dati. Data una matrice di dati X ($n \times p$), la PCA calcola la decomposizione ai valori singolari:

$$X = U\Sigma V^T$$

Le colonne di V (i vettori singolari destri) sono le componenti principali, ordinate per importanza secondo i valori singolari in Σ . Le prime k componenti principali catturano la massima varianza possibile in k dimensioni.

Nel contesto fonologico, la PCA può rivelare le dimensioni percettive o articolatorie principali. Ad esempio, applicata a formanti vocaliche, le prime due componenti principali tipicamente corrispondono approssimativamente ad altezza e avanzamento articolatorio.

Il t-SNE (t-distributed Stochastic Neighbor Embedding) è una tecnica non lineare che preserva relazioni di prossimità locale. Minimizza la divergenza di Kullback-Leibler tra la distribuzione di probabilità di coppie nello spazio originale e nello spazio ridotto:

$$KL(P \parallel Q) = \sum_i p_{ij} \log(p_{ij} / q_{ij})$$

dove p_{ij} è la probabilità che i e j siano vicini nello spazio originale, e q_{ij} è la probabilità corrispondente nello spazio ridotto.

Il t-SNE è particolarmente efficace per visualizzare cluster in dati ad alta dimensione e può rivelare strutture categoriali nei sistemi fonologici.

UMAP (Uniform Manifold Approximation and Projection) è una tecnica più recente basata su teoria dei grafi e topologia algebrica (omologia persistente). Costruisce un grafo pesato nello spazio originale basato su prossimità locale, poi trova un embedding a bassa dimensione che preserva la struttura del grafo.

Test di Ipotesi e Inferenza Statistica

I test di ipotesi permettono di valutare se pattern osservati nei dati fonologici sono statisticamente significativi o potrebbero essere dovuti al caso.

Un test tipico ha la struttura:

- Ipotesi nulla H_0 : nessun effetto o differenza
- Ipotesi alternativa H_1 : effetto o differenza presente
- Statistica test T calcolata dai dati
- P-value: probabilità di osservare T almeno così estremo sotto H_0

Nel contesto fonologico, potremmo testare se la durata delle vocali differisce significativamente in contesti diversi. Un test t per due campioni confronta le medie:

$$t = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) / \sqrt{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)}$$

dove $\bar{x}_i$ sono le medie campionarie, s_i^2 le varianze campionarie, e n_i le dimensioni campionarie.

Per confronti multipli (ad esempio, confrontare durate vocaliche in molti contesti diversi), è necessario correggere per test multipli usando metodi come la correzione di Bonferroni o il controllo del False Discovery Rate (FDR).

I modelli lineari misti (LMM: Linear Mixed Models) sono particolarmente importanti per dati fonologici con struttura gerarchica (ripetizioni annidate in parole annidate in parlanti). Un LMM ha la forma:

$$y = X\beta + Zu + \varepsilon$$

dove $X\beta$ rappresenta effetti fissi, Zu rappresenta effetti casuali, e ε è il rumore residuo.

Gli effetti fissi β catturano pattern medi della popolazione, mentre gli effetti casuali u catturano variazione individuale. L'inferenza su β (test se certi effetti sono significativamente diversi da zero) permette di trarre conclusioni sulla popolazione.

Complessità Computazionale e Decidibilità

La teoria della complessità computazionale classifica problemi secondo la quantità di risorse (tempo, spazio) necessarie per risolverli. Applicata alla fonologia, rivela quali problemi fonologici sono trattabili in pratica e quali sono intrinsecamente difficili.

Classi di Complessità Fondamentali

Le principali classi di complessità temporale sono:

- P: problemi risolvibili in tempo polinomiale (deterministico)
- NP: problemi verificabili in tempo polinomiale
- PSPACE: problemi risolvibili in spazio polinomiale
- EXPTIME: problemi risolvibili in tempo esponenziale

Un problema è in P se esiste un algoritmo che lo risolve in tempo $O(n^k)$ per qualche costante k , dove n è la dimensione dell'input. Questi problemi sono considerati "trattabili".

Un problema è in NP se, data una soluzione proposta, possiamo verificare la sua correttezza in tempo polinomiale. La questione se $P = NP$ è uno dei problemi aperti più importanti in matematica e informatica teorica.

Un problema è NP-completo se è in NP e ogni altro problema in NP può essere ridotto ad esso in tempo polinomiale. Se un problema NP-completo può essere risolto in tempo polinomiale, allora $P = NP$.

Nel contesto fonologico, diversi problemi hanno complessità nota:

- Riconoscimento mediante FSA: in P (tempo $O(n)$ dove n è la lunghezza dell'input)
- Composizione di FST: in P (tempo $O(n \cdot |Q_1| \cdot |Q_2|)$)

- Satisfacibilità di vincoli OT: può essere NP-completo in certi casi
- Apprendimento di grammatiche da esempi: spesso NP-difficile o più difficile

Riducibilità e Completezza

Una riduzione da un problema A a un problema B è un algoritmo efficiente che trasforma istanze di A in istanze di B preservando risposte. Se esiste una riduzione polinomiale da A a B, allora B è almeno tanto difficile quanto A.

Formalmente, $A \leq_p B$ (A si riduce polinomialmente a B) se esiste una funzione calcolabile in tempo polinomiale f tale che:

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$$

Le riduzioni permettono di classificare problemi per difficoltà relativa e di trasferire conoscenze di complessità tra problemi.

Nel contesto fonologico, potremmo ridurre il problema di trovare un ordinamento di vincoli OT compatibile con dati osservati al problema SAT (satisfacibilità booleana). Codifichiamo i vincoli e i dati come formula booleana, e un assegnamento soddisfacente corrisponde a un ordinamento valido.

Poiché SAT è NP-completo, questo dimostra che l'apprendimento di OT è NP-difficile, spiegando perché può essere computazionalmente impegnativo in pratica.

Decidibilità e Indecidibilità

Un problema è decidibile se esiste un algoritmo che termina sempre con la risposta corretta. Alcuni problemi sono indecidibili: nessun algoritmo può risolverli in generale.

Il problema della fermata (Halting Problem) è un classico problema indecidibile: dato un programma P e un input x , determina se $P(x)$ termina o va in loop infinito. Alan Turing ha dimostrato che questo problema è indecidibile mediante un argomento diagonale.

Nel contesto fonologico, consideriamo il problema dell'equivalenza di grammatiche: date due grammatiche G_1 e G_2 , determinano se generano esattamente lo stesso insieme di forme superficiali per tutti gli input?

Per grammatiche basate su FST, questo problema è decidibile: possiamo costruire l'intersezione dei due transduttori e verificare se accetta tutte le stringhe. Tuttavia, per formalismi più espressivi (come grammatiche con regole ricorsive illimitate), il problema potrebbe diventare indecidibile.

Complessità Parametrizzata

La complessità parametrizzata studia come la complessità dipende non solo dalla dimensione totale dell'input n , ma anche da parametri specifici k . Un problema è fixed-parameter tractable (FPT) rispetto a k se può essere risolto in tempo $f(k) \cdot \text{poly}(n)$ dove f è una funzione arbitraria (possibilmente esponenziale) e poly è polinomiale.

Nel contesto fonologico, consideriamo il problema di trovare un ordinamento di vincoli OT. Se parametrizziamo per il numero di vincoli k , il problema potrebbe essere FPT anche se è NP-difficile nel caso generale: possiamo enumerare tutti i $k!$ ordinamenti possibili in tempo $O(k! \cdot \text{poly}(n))$.

Questo spiega perché l'apprendimento di OT può essere praticabile per grammatiche con pochi vincoli (k piccolo) anche se teoricamente difficile in generale.

Complessità di Comunicazione e Protocolli

La complessità di comunicazione studia quanti bit devono essere scambiati tra due agenti per risolvere un problema distribuito. Nel contesto fonologico, potremmo considerare due parlanti che cercano di coordinare le loro grammatiche.

Formalmente, due agenti Alice e Bob hanno input x e y rispettivamente, e vogliono calcolare una funzione $f(x, y)$. Devono comunicare per determinare $f(x, y)$, e la complessità di comunicazione è il numero minimo di bit scambiati nel protocollo più efficiente.

Ad esempio, consideriamo il problema di determinare se due inventari fonologici hanno intersezione non vuota. Alice ha l'inventario I_A e Bob ha I_B . Nel caso peggiore, potrebbero dover comunicare $O(n)$ bit dove n è la dimensione degli inventari.

La complessità di comunicazione può modellizzare costi di coordinazione in comunità linguistiche: quanto "comunica"

Teoria dei Giochi e Interazione Strategica nella Fonologia

La teoria dei giochi fornisce strumenti formali per analizzare situazioni di interazione strategica, dove le scelte di un agente influenzano i payoff di altri agenti. Nel contesto fonologico, la teoria dei giochi può modellizzare l'evoluzione dei sistemi fonologici attraverso interazioni tra parlanti e ascoltatori, e l'emergere di convenzioni fonologiche in comunità linguistiche.

Giochi Evolutivi e Dinamica dei Replicatori

I giochi evolutivi studiano come strategie si diffondono in popolazioni attraverso processi di selezione e replicazione. Invece di assumere razionalità perfetta, questi modelli postulano che strategie più successful si replicano più frequentemente.

Consideriamo una popolazione di parlanti dove ciascuno può adottare una di n strategie (ad esempio, diverse pronunce di un fonema). La fitness di una strategia i quando giocata contro una strategia j è data dalla matrice di payoff $A_{\{ij\}}$. Se x_i è la frequenza della strategia i nella popolazione, la fitness media della strategia i è:

$$f_i(x) = \sum_j A_{\{ij\}} x_j$$

e la fitness media della popolazione è:

$$\bar{f}(x) = \sum_i x_i f_i(x)$$

La dinamica dei replicatori governa l'evoluzione delle frequenze:

$$dx_i/dt = x_i [f_i(x) - \bar{f}(x)]$$

Questa equazione afferma che strategie con fitness superiore alla media crescono in frequenza, mentre strategie con fitness inferiore declinano.

Gli equilibri della dinamica dei replicatori sono punti fissi dove $dx_i/dt = 0$ per ogni i . Un equilibrio è evolutivamente stabile (ESS: Evolutionarily Stable Strategy) se è robusto a invasioni da parte di strategie mutanti rare.

Formalmente, x^* è un ESS se per ogni $y \neq x^*$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$:

$$f(x^*, x_\varepsilon) > f(y, x_\varepsilon)$$

dove $x_\varepsilon = (1-\varepsilon)x + \varepsilon y$ è una popolazione quasi-monomorfica con piccola frazione ε di mutanti.

Nel contesto fonologico, gli ESS rappresentano pronunce o sistemi fonologici che sono resistenti a innovazioni. La dinamica dei replicatori può spiegare perché certi cambiamenti fonologici si diffondono mentre altri non riescono a stabilirsi.

Giochi di Segnalazione e Convenzioni Fonologiche

I giochi di segnalazione modellano situazioni dove un sender (parlante) trasmette informazione a un receiver (ascoltatore) attraverso segnali. Il modello classico di Lewis considera uno spazio di stati S , uno spazio di segnali M , e uno spazio di azioni A .

Il sender osserva uno stato $s \in S$ e sceglie un segnale $m \in M$ secondo una strategia $\sigma: S \rightarrow \Delta(M)$ dove $\Delta(M)$ è l'insieme delle distribuzioni di probabilità su M . Il receiver osserva il segnale m e sceglie un'azione $a \in A$ secondo una strategia $p: M \rightarrow \Delta(A)$.

I payoff dipendono dalla corrispondenza tra lo stato e l'azione. Una funzione di utilità tipica è:

$$u(s, a) = 1 \text{ se } a \text{ è appropriato per } s \quad u(s, a) = 0 \text{ altrimenti}$$

Un equilibrio di segnalazione è una coppia (σ^*, p^*) tale che ciascuna strategia è una best response all'altra. In equilibrio perfetto, il sender usa segnali diversi per stati diversi, e il receiver interpreta correttamente i segnali.

Nel contesto fonologico, stati potrebbero essere significati lessicali, segnali potrebbero essere forme fonologiche, e azioni potrebbero essere interpretazioni semantiche. Un sistema fonologico emerge come convenzione coordinata tra parlanti e ascoltatori.

Un risultato importante è che i giochi di segnalazione hanno tipicamente equilibri multipli: diverse convenzioni fonologiche potrebbero essere ugualmente stabili. La selezione tra equilibri può dipendere da fattori cognitivi, percettivi, o storici.

Giochi Ripetuti e Cooperazione Fonologica

Nei giochi ripetuti, gli stessi giocatori interagiscono ripetutamente nel tempo. La possibilità di future interazioni può sostenere cooperazione anche quando la cooperazione sarebbe instabile in interazioni one-shot.

Il Folk Theorem afferma che in giochi ripetuti infinitamente con sconto sufficientemente basso (δ vicino a 1), qualsiasi profilo di payoff individualmente razionale può essere sostenuto come equilibrio mediante strategie di punizione.

Nel contesto fonologico, parlanti potrebbero cooperare mantenendo distinzioni fonologiche che sono costose da produrre ma benefiche per la chiarezza comunicativa. La minaccia di incomprensione (punizione) sostiene questa cooperazione.

Ad esempio, consideriamo la distinzione tra /r/ e /l/ che è articolatoriamente costosa per alcuni parlanti. In un'interazione one-shot, un parlante potrebbe essere tentato di neutralizzare questa distinzione risparmiando sforzo. Tuttavia, in interazioni ripetute con possibilità di fraintendimenti futuri, mantenere la distinzione diventa un equilibrio sostenibile.

Teoria delle Aste e Competizione Lessicale

La teoria delle aste studia meccanismi per allocare risorse scarse a partecipanti competitivi. Nel contesto fonologico, possiamo concepire forme fonologiche come risorse scarse per cui significati lessicali competono.

In un'asta di secondo prezzo (Vickrey auction), partecipanti fanno offerte sealed, e il vincitore paga il secondo prezzo più alto. Questa asta ha la proprietà di essere strategy-proof: fare un'offerta uguale al proprio valore è una strategia dominante.

Nel contesto lessicale, possiamo modellizzare nuove parole che "fanno offerte" per forme fonologiche disponibili, dove l'offerta riflette l'utilità comunicativa della forma. Forme che sono già associate a parole esistenti hanno costi più alti (rischio di confusione), simulando un meccanismo di asta.

Il teorema di equivalenza dei ricavi afferma che diverse forme di asta generano lo stesso ricavo atteso in condizioni standard. Nel contesto fonologico, questo suggerisce che meccanismi diversi di assegnazione forma-significato potrebbero convergere a distribuzioni simili di efficienza comunicativa.

Giochi Cooperativi e Formazione di Coalizioni

I giochi cooperativi studiano situazioni dove giocatori possono formare coalizioni vincolanti. Un gioco cooperativo è specificato da una funzione valore v che assegna a ogni coalizione $S \subseteq N$ un payoff $v(S)$.

Il nucleo (core) è l'insieme di allocazioni che non possono essere migliorate da nessuna coalizione:

$$\text{Core} = \{x : \sum_i x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \text{ per ogni } S \subseteq N\}$$

Il valore di Shapley ϕ_i assegna a ciascun giocatore un payoff basato sui suoi contributi marginali:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} (|S|! (|N| - |S| - 1)! / |N|!) \cdot [v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

Nel contesto sociolinguistico, coalizioni potrebbero rappresentare comunità di parlanti che coordinano innovazioni fonologiche. Il valore di Shapley potrebbe quantificare l'influenza di ciascun parlante sulla diffusione di un cambiamento fonologico.

Geometria Differenziale e Varietà Fonologiche

La geometria differenziale studia spazi (varietà) dotati di strutture che permettono di fare calcolo differenziale. Gli spazi fonologici possono essere modellizzati come varietà differenziabili, permettendo l'applicazione di strumenti geometrici sofisticati.

Varietà Riemanniane e Metriche Intrinseche

Una varietà riemanniana è una varietà differenziabile M dotata di una metrica riemanniana g , ovvero un campo tensoriale che assegna a ogni punto $p \in M$ un prodotto scalare g_p sul spazio tangente $T_p M$.

La metrica permette di misurare lunghezze di curve e angoli tra vettori tangenti. Data una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow M$, la sua lunghezza è:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt$$

La distanza geodetica tra due punti $p, q \in M$ è l'infimo delle lunghezze di tutte le curve che connettono p e q .

Nel contesto fonologico, lo spazio delle configurazioni articolatorie può essere modellizzato come una varietà riemanniana dove la metrica riflette il costo di transizioni articolatorie. Configurazioni che richiedono grandi movimenti articolatori sono geometricamente distanti anche se sono vicine nello spazio dei parametri.

La metrica può essere costruita a partire da considerazioni biomeccaniche. Se $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ sono coordinate articolatorie (posizioni di articolatori), la metrica potrebbe avere la forma:

$$g_{ij}(q) = m_i(q) \delta_{ij} + K_{ij}(q)$$

dove $m_i(q)$ sono masse efficaci e $K_{ij}(q)$ cattura accoppiamenti biomeccanici tra gradi di libertà.

Connessioni e Trasporto Parallelo

Una connessione su una varietà M è un modo di differenziare campi vettoriali lungo curve. Data una curva $\gamma(t)$ e un campo vettoriale $V(t)$ lungo γ , la derivata covariante $\nabla_{\gamma'} V$ misura come V cambia lungo γ tenendo conto della curvatura di M .

Il trasporto parallelo di un vettore $v \in T_p M$ lungo una curva γ da p a q produce un vettore $w \in T_q M$ che è "parallelo" a v rispetto alla connessione. Formalmente, w è ottenuto risolvendo l'equazione differenziale:

$$\nabla_{\gamma'} V = 0$$

con condizione iniziale $V(0) = v$.

Nel contesto fonologico, il trasporto parallelo potrebbe rappresentare come tratti o configurazioni si trasformano "naturalmente" durante transizioni articolatorie, seguendo percorsi di minima interferenza.

La connessione di Levi-Civita è l'unica connessione su una varietà riemanniana che è simmetrica (torsion-free) e compatibile con la metrica. Le geodetiche (curve di lunghezza minima) sono caratterizzate come curve con accelerazione geodetica zero: $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$.

Curvatura e Teoria di Gauss-Bonnet

La curvatura quantifica quanto una varietà si discosta dall'essere piatta (euclidea). Esistono diverse nozioni di curvatura:

La curvatura sezionale $K(\sigma)$ per un piano bidimensionale $\sigma \subset T_p M$ è definita mediante la curvatura di Riemann R :

$$K(\sigma) = \langle R(u, v)v, u \rangle / (\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2)$$

dove u, v è una base di σ .

La curvatura di Ricci Ric è una contrazione del tensore di curvatura e misura come volumi di sfere geodetiche si discostano dal caso euclideo. La curvatura scalare S è la traccia della curvatura di Ricci.

Il teorema di Gauss-Bonnet connette la topologia di una superficie compatta M alla sua geometria:

$$\int_M K \, dA = 2\pi \chi(M)$$

dove K è la curvatura gaussiana (curvatura sezionale per superfici bidimensionali), dA è l'elemento di area, e $\chi(M)$ è la caratteristica di Eulera.

Nel contesto fonologico, regioni di curvatura positiva in uno spazio articolatorio potrebbero corrispondere a attrattori fonologici: punti verso cui le traiettorie convergono. Regioni di curvatura negativa potrebbero corrispondere a punti di sella o regioni di instabilità.

Fibrati Tangenti e Cotangenti

Il fibrato tangente TM di una varietà M è l'unione disgiunta di tutti gli spazi tangenti:

$$TM = \sqcup_{p \in M} T_p M$$

con una struttura di varietà naturale. Similmente, il fibrato cotangente T^*M è l'unione degli spazi cotangenti (duali degli spazi tangenti).

Il fibrato cotangente ha una struttura symplettica naturale (forma symplettica canonica ω) che lo rende centrale in meccanica hamiltoniana. Nel contesto fonologico, T^*M può rappresentare lo spazio di fase di un sistema articolatorio, dove le configurazioni e i momenti evolvono secondo equazioni hamiltoniane.

La forma symplettica ω è una forma differenziale bilineare antisimmetrica non degenere che soddisfa $d\omega = 0$. In coordinate canoniche (q, p) , ha la forma:

$$\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i$$

Hamiltoniane $H: T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ generano flussi hamiltoniani mediante l'equazione:

$$dH = \omega(X_H, \cdot)$$

dove X_H è il campo vettoriale hamiltoniano. In coordinate canoniche:

$$dq_i/dt = \partial H / \partial p_i \quad dp_i/dt = -\partial H / \partial q_i$$

Questi sono le equazioni di Hamilton della meccanica classica, che potrebbero modellizzare la dinamica di sistemi articolatori complessi.

Forme Differenziali e Integrazione

Le forme differenziali generalizzano le nozioni di funzioni, campi vettoriali, e volumi a varietà di dimensione arbitraria. Una k -forma su una varietà M assegna a ogni punto $p \in M$ un'applicazione multilineare antisimmetrica:

$$\omega_p: (T_p M)^k \rightarrow \mathbb{R}$$

Lo spazio delle k -forme è denotato $\Omega^k(M)$. La derivata esterna $d: \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}$ soddisfa $d^2 = 0$, definendo un complesso di de Rham:

$$0 \rightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \dots \rightarrow \Omega^n \rightarrow 0$$

I gruppi di coomologia di de Rham sono:

$$H^k_{dR}(M) = \ker(d: \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}) / \operatorname{im}(d: \Omega^{k-1} \rightarrow \Omega^k)$$

Il teorema di de Rham afferma che $H^k_{dR}(M)$ è isomorfo al k -esimo gruppo di coomologia singolare di M , connettendo geometria differenziale e topologia algebrica.

Il teorema di Stokes generalizza il teorema fondamentale del calcolo:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

dove M è una varietà orientata compatta con bordo ∂M , e ω è una $(n-1)$ -forma.

Nel contesto fonologico, le forme differenziali potrebbero rappresentare densità di probabilità o flussi di informazione attraverso spazi fonologici. Il teorema di Stokes potrebbe esprimere leggi di conservazione in processi fonologici.

Geometria Simplettica e Meccanica Hamiltoniana

Una varietà simplettica è una coppia (M, ω) dove ω è una forma simplettica (chiusa e non degenera). La geometria simplettica è il framework naturale per la meccanica classica e ha connessioni profonde con la teoria dei sistemi dinamici.

Un simplettomorfismo è una mappa $f: M_1 \rightarrow M_2$ tra varietà simplettiche che preserva la forma simplettica: $f^*\omega_2 = \omega_1$. I simplettomorfismi preservano volumi (teorema di Liouville) e struttura di Poisson.

La parentesi di Poisson di due funzioni $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ è definita come:

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$$

dove X_f e X_g sono i campi vettoriali hamiltoniani generati da f e g . La parentesi di Poisson soddisfa:

- Bilinearità: $\{af + bg, h\} = a\{f, h\} + b\{g, h\}$
- Antisimmetria: $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- Identità di Jacobi: $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$

Nel contesto fonologico, se lo spazio articolatorio è modellizzato come varietà simplettica, osservabili fonologiche (energia, momento, ecc.) hanno parentesi di Poisson che governano la loro evoluzione temporale.

Teoria di Morse e Topologia di Spazi Fonologici

La teoria di Morse, già menzionata precedentemente, può essere sviluppata in modo più completo nel contesto di varietà differenziabili. Data una funzione di Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ (funzione liscia i cui punti critici sono non degeneri), l'indice di un punto critico p è il numero di autovalori negativi dell'hessiano di f in p .

Il complesso di Morse associa a ogni punto critico p una catena $C_{\text{ind}(p)}$, e l'operatore bordo conta traiettorie di flusso gradiente che connettono punti critici di indice differente per 1. L'omologia del complesso di Morse è isomorfa all'omologia singolare di M (teorema di Morse).

La filtrazione di Morse definisce sottoinsiemi $M_a = \{x \in M : f(x) \leq a\}$. Al crescere di a , la topologia di M_a cambia quando a attraversa valori critici. Specificatamente, quando a passa un valore critico c con punto critico di indice k , la topologia di M_a cambia attaccando una k -cella.

Nel contesto fonologico, consideriamo f come una funzione di "costo articolatorio". I punti critici di indice 0 (minimi) rappresentano configurazioni ottimali, i punti critici di indice 1 rappresentano transizioni attraverso barriere unidimensionali, e così via. La filtrazione di

Morse rivela come lo spazio delle configurazioni accessibili si espande all'aumentare del budget energetico disponibile.

Teoria dei Sistemi Integrabili

Un sistema hamiltoniano è integrabile se possiede n costanti del moto indipendenti e in involuzione (con parentesi di Poisson nulla tra loro) su una varietà simplettica $2n$ -dimensionale. Il teorema di Liouville-Arnold afferma che un sistema integrabile può essere localmente portato in forma action-angle mediante un simplettomorfismo.

In coordinate action-angle (I, θ) , l'hamiltoniano dipende solo dalle azioni: $H = H(I)$. Le equazioni del moto divengono:

$dI/dt = 0$ (le azioni sono conservate) $d\theta/dt = \partial H/\partial I = \omega(I)$ (gli angoli evolvono con frequenze costanti)

Il moto è quindi quasi-periodico su tori invarianti T^n .

Nel contesto fonologico, sistemi articolatori potrebbero essere approssimativamente integrabili, con modi normali corrispondenti ad azioni conservate. Perturbazioni (dovute a coarticolazione o effetti prosodici) rompono l'integrabilità, introducendo caos deterministico.

Fisica Statistica e Meccanica Statistica dei Sistemi Fonologici

La fisica statistica fornisce strumenti per derivare comportamenti macroscopici da dinamiche microscopiche stocastiche. Applicata alla fonologia, può spiegare come pattern fonologici emergono da interazioni tra molti componenti.

Modelli di Ising e Sistemi di Spin

Il modello di Ising è un modello paradigmatico in fisica statistica. Consideriamo una rete di spin $s_i \in \{-1, +1\}$ con energia:

$$E(s) = -\sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} s_i s_j - \sum_i h_i s_i$$

dove J_{ij} sono accoppiamenti tra spin vicini e h_i sono campi esterni.

Nel contesto fonologico, possiamo interpretare spin come valori binari di tratti distintivi, accoppiamenti J_{ij} come tendenze all'armonia o alla dissimilazione, e campi h_i come bias lessicali o posizionali.

La distribuzione di Boltzmann assegna probabilità agli stati:

$$P(s) = (1/Z) \exp(-\beta E(s))$$

dove $\beta = 1/(k_B T)$ è la temperatura inversa e Z è la funzione di partizione:

$$Z = \sum_s \exp(-\beta E(s))$$

A basse temperature (β grande), il sistema tende a stati di minima energia. Ad alte temperature (β piccolo), tutti gli stati sono equiprobabili. Il modello di Ising esibisce transizioni di fase: a una temperatura critica T_c , il comportamento del sistema cambia qualitativamente. Sopra T_c , gli spin sono disordinati (nessuna armonia macroscopica). Sotto T_c , emerge ordine spontaneo (armonia fonologica sistematica).

Campi Aleatori di Markov e Modelli Grafici

I campi aleatori di Markov (MRF: Markov Random Fields) generalizzano il modello di Ising. Un MRF è specificato da un grafo $G = (V, E)$ e potenziali locali ϕ_C per ogni clique C in G . La distribuzione congiunta è:

$$P(x) = (1/Z) \exp(\sum_C \phi_C(x_C))$$

dove x_C sono le variabili nella clique C .

Il teorema di Hammersley-Clifford afferma che una distribuzione soddisfa la proprietà di Markov rispetto a G (condizionale su un insieme, variabili sono indipendenti dai loro non-vicini) se e solo se può essere rappresentata come MRF con potenziali sulle cliques di G .

Nel contesto fonologico, G potrebbe rappresentare la struttura di dipendenze in una parola o enunciato: nodi sono segmenti o tratti, archi rappresentano dipendenze fonologiche. I potenziali ϕ_C codificano vincoli fonologici locali. L'inferenza in MRF (calcolare marginali o trovare configurazioni di massima probabilità) può essere effettuata mediante belief propagation o algoritmi variazionali. Per grafi con treewidth limitata, l'inferenza è trattabile in tempo polinomiale.

Simulazioni Monte Carlo e Tempering

Le simulazioni Monte Carlo permettono di campionare da distribuzioni complesse come quelle definite da MRF. L'algoritmo di Metropolis-Hastings genera una catena di Markov la cui distribuzione stazionaria è la distribuzione target P .

Dato lo stato corrente x , proponiamo una nuova configurazione x' secondo una distribuzione proposta $q(x'|x)$. Accettiamo x' con probabilità:

$$\alpha(x \rightarrow x') = \min(1, P(x')q(x|x') / (P(x)q(x'|x)))$$

Altrimenti, rimaniamo in x . Questo algoritmo converge asintoticamente alla distribuzione corretta. Il simulated annealing è una variante dove la temperatura β viene gradualmente aumentata (raffreddamento), permettendo al sistema di sfuggire minimi locali e convergere al minimo globale.

Il parallel tempering (o replica exchange) esegue simultaneamente simulazioni a diverse temperature e permette scambi tra configurazioni a temperature diverse, accelerando l'esplorazione dello spazio. Nel contesto fonologico, queste tecniche possono essere

utilizzate per esplorare paesaggi di vincoli complessi o per apprendere parametri di modelli MaxEnt da dati empirici.

Meccanica Statistica Fuori Equilibrio

Molti processi fonologici sono intrinsecamente fuori equilibrio: il sistema evolve verso stati stabili ma potrebbe non raggiungerli mai. La meccanica statistica fuori equilibrio studia questi sistemi mediante equazioni cinetiche.

L'equazione master descrive l'evoluzione temporale della distribuzione di probabilità:

$$dP_i/dt = \sum_j [W_{ji} P_j - W_{ij} P_i]$$

dove W_{ij} è il tasso di transizione dallo stato i allo stato j .

Il bilancio dettagliato (detailed balance):

$$W_{ij} P_i^{eq} = W_{ji} P_j^{eq}$$

è una condizione sufficiente per l'esistenza di una distribuzione stazionaria P^{eq} . Quando il bilancio dettagliato è violato, il sistema può esibire correnti stazionarie (flussi netti tra stati). Nel contesto fonologico, un sistema potrebbe evolvere sotto pressioni comunicative in competizione (chiarezza vs. economia articolatoria), mantenendo flussi stazionari invece di raggiungere equilibrio.

Scaling e Universalità

Vicino a transizioni di fase, molti sistemi fisici esibiscono comportamento di scaling universale: quantità fisiche variano come leggi di potenza con esponenti critici che dipendono solo da proprietà generali (dimensionalità, simmetrie) non da dettagli microscopici.

Ad esempio, vicino alla temperatura critica T_c , la magnetizzazione in un modello di Ising scala come:

$$m \sim (T_c - T)^\beta$$

dove β è un esponente critico universale.

Le classi di universalità raggruppano sistemi fisici che esibiscono gli stessi esponenti critici. Il gruppo di rinormalizzazione fornisce una spiegazione teorica dell'universalità mediante scaling di lunghezze. Nel contesto sociolinguistico, fenomeni di diffusione lessicale o di cambiamento fonologico potrebbero esibire comportamento universale vicino a punti critici (soglie di adozione di massa), con esponenti caratteristici indipendenti dai dettagli della lingua specifica.

Entropia e Secondo Principio

Il secondo principio della termodinamica afferma che l'entropia di un sistema isolato non decresce mai. Per sistemi in contatto con un bagno termico, la quantità rilevante è l'energia libera:

$$F = E - TS$$

dove E è l'energia interna, T è la temperatura, e S è l'entropia. All'equilibrio termico, F è minimizzata.

Nel contesto fonologico, potremmo interpretare E come costo articolatorio e S come diversità o imprevedibilità fonologica. La minimizzazione di F rappresenta un compromesso: a temperatura zero ($T = 0$), solo l'energia conta, favorendo economia articolatoria massima. A temperatura infinita ($T \rightarrow \infty$), solo l'entropia conta, favorendo massima variabilità. Temperature finite rappresentano situazioni realistiche dove esiste un trade-off tra economia e espressività/robustezza.

Conclusioni Integrative: Verso una Fonologia Matematica Unificata

Questo trattato estensivo ha esplorato molteplici prospettive matematiche sulla fonologia, ciascuna rivelando aspetti diversi ma complementari dell'organizzazione dei sistemi sonori. L'approccio algebrico illumina le strutture discrete e le simmetrie, la geometria rivela paesaggi continui e metriche naturali, la teoria dei grafi cattura connessioni e reti, l'ottimizzazione formalizza compromessi e vincoli, i sistemi dinamici descrivono evoluzione temporale, la teoria dell'informazione quantifica complessità ed efficienza, la topologia algebrica rivela invarianti strutturali, la logica fornisce fondamenti formali, la teoria dei giochi modella interazioni strategiche, e la fisica statistica spiega emergenza da micro a macro. Queste diverse prospettive non sono in competizione ma costituiscono facce diverse dello stesso poliedro matematico che è la fonologia. Una fonologia matematica veramente unificata dovrebbe integrare questi approcci, riconoscendo che:

- Le strutture algebriche discrete emergono come approssimazioni di varietà differenziabili continue attraverso discretizzazione
- Le reti grafiche possono essere embedded in spazi geometrici, acquisendo metriche e curvature
- I processi ottimi secondo criteri formali corrispondono a traiettorie geodetiche in geometrie appropriate
- Le dinamiche deterministiche generano distribuzioni probabilistiche quando soggette a rumore
- Le categorie topologiche forniscono il linguaggio unificante per esprimere tutte queste connessioni

Il futuro della fonologia matematica risiede nell'approfondimento di queste connessioni, nella scoperta di nuovi invarianti matematici dei sistemi fonologici, e nell'applicazione di strumenti matematici sempre più sofisticati per rivelare l'architettura profonda del linguaggio umano nella sua dimensione sonora.